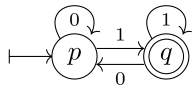
TCS FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
Lehrstuhl für Theoretische Informatik Priv.-Doz. Dr. S. Milius
Dr. S. Goncharov

Musterlösung 4

Aufgabe 1

(a) Hier ist der gewünschte Graph:

$A:$



(b) Hier sind einige akzeptierte Wörter:

$$1, 11, 01, 101, 1011\,;$$

und hier sind einige nicht akzeptierte Wörter:

$$\varepsilon, 0, 00, 10, 1010\,.$$

(c) Wiederholung: sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Konstruiere Grammatik $G_M = (Z, \Sigma, P, z_0)$ mit Regeln:

$$\begin{array}{lll} P: & z \to az' & \text{für alle } z, z' \in Z,\ a \in \Sigma \text{ mit } \delta(z,a) = z', \\ & z \to \varepsilon & \text{für alle } z \in E. \end{array}$$

Dann für $A = (\{p,q\}, \{0,1\}, \delta, p, \{q\})$ haben wir $G_A = (\{p,q\}, \{0,1\}, P, p)$ mit P gegeben als

$$\begin{array}{llllllll} P: & p & \to & 0p & \mid & 1q & & \\ & q & \to & 0p & \mid & 1q & \mid & \varepsilon \end{array}$$

(d) Wir vermuten, dass die von A akzeptierte Sprache genau die Wörter über $\{0,1\}$ enthält, die auf 1 enden:

$$L(A) = \{\, w \mid w = v1, v \in \{0,1\}^* \,\}\,.$$

Begründung: Von jedem der beiden Zustände führt die Eingabe der 1 immer in den Finalzustand q, und die Eingabe der 0 führt immer in den Zustand p. Ein Wort wird daher von A genau dann akzeptiert, wenn es auf 1 endet.

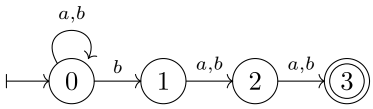
Zusatz: Wir arbeiten jetzt die obige Begründung nochmal zu einem detailierten Beweis aus. Unser Beweis zeigt, dass $L = L(A)$ gilt. Dazu müssen wir zwei Mengeninklusionen zeigen: $L \subseteq L(A)$ und $L(A) \subseteq L$.

1. Es gilt $L \subseteq L(A)$. Dazu müssen wir zeigen, dass jedes Wort über $\{0,1\}$, das auf 1 endet von dem Automaten akzeptiert wird. Es sei $w = s_1 s_2 \cdots s_n 1$ ein Wort aus L wobei $s_i = 0$ oder 1 für $i = 1, \ldots, n$. Wir betrachten die Berechnung dieses Wortes mit A: nach Abarbeitung der Eingabebuchstaben s_1 bis s_n befindet sich der Automat in einem seiner zwei Zustände p oder q. Die jetzt folgende Eingabe von 1 führt auf jeden Fall in den Zustand q, der ein Finalzustand ist. Daher akzeptiert A das Wort w.

2. Es gilt $L(A) \subseteq L$. Dazu müssen wir zeigen, dass jedes Wort über $\{0,1\}$, das von A akzeptiert wird, auch auf 1 endet. Es sei also w ein Wort, das von A akzeptiert wird. Das heißt, nach der Abarbeitung des Wortes w ist der Automat im Zustand q. Zunächst kann w nicht das leere Wort sein, weil q nicht der Starzustand ist. Außerdem kann der Zustand q nur erreicht werden, wenn der letzte Eingabebuchstabe von w eine 1 war, denn von jedem Zustand führt die Eingabe der 0 immer in dem Zustand p.

Aufgabe 2

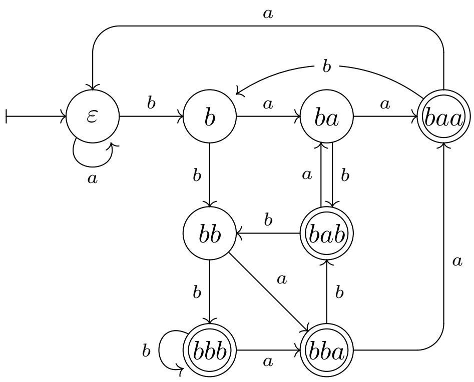
(a) Der folgende NFA leistet das Gewünschte (die doppelte Beschriftung der Pfeile ist üblich, um zwei verschiedene Regeln mit einem Pfeil darzustellen):



Die Idee ist ziemlich klar: jede akzeptierende Berechnung muss ein b an der drittletzten Stelle verarbeiten.

(b) Dies ist ein gutes Beispiel wieviel schwerer der direkte Entwurf eines DFAs sein kann!

Die Entwurfsidee ist hier, dass jeder Zustand des DFA speichert, welche Zeichen seit und inklusive des letzten Auftretens eines b-Symbols gelesen wurden. Dabei werden aber höchstens 3 Zeichen gespeichert. Wir schreiben der Einfachheit halber die gespeicherten Zeichen in die Zustände hinein. Die korrekte formale Definition müsste die Zustände irgendwie anders benennen (zum Beispiel $0, 1, 2, \ldots$ oder $q_0, q_1, q_2, \ldots$):



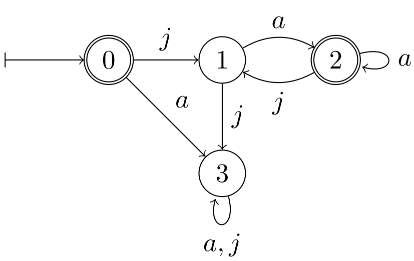
Wie man sieht ist der Automat hier viel komplizierter als der in Teilaufgabe (a). Dem Automaten in (a) kann man sofort ansehen, dass er das Gewünschte auch wirklich leistet. Ersetzt man in dem obigen Automaten die gespeicherten Zeichenketten durch beliebige Zustandsnamen, ist dies sicher nicht mehr ohne Weiteres möglich.

(c) Grammatik $G = (\{0, 1, 2, 3\}, \{a, b\}, P, 0)$ mit Regeln:

$$\begin{array}{llcl} P: & 0 & \to & a0 \mid b0 \mid b1 \\ & 1 & \to & a2 \mid b2 \\ & 2 & \to & a \mid b \end{array}$$

Aufgabe 3

Hier ist der gewünschte DFA:



Grammatik $G = (\{0, 1, 2, 3\}, \{a, j\}, P, 0)$ mit Regeln:

$$
\begin{array}{lrclclcl}
P: & 0 & \rightarrow & a3 & \mid & j1 & & \\
 & 1 & \rightarrow & a2 & \mid & j3 & & \\
 & 2 & \rightarrow & a2 & \mid & j1 & \mid & \varepsilon
\end{array}
$$