

Aufgabe 2 – Autor

Übungsleiter/Tag/Uhrzeit

Aufgabestellung: Wir betrachten das folgende funktionale Programm (gegeben in Haskell-Syntax):

```
1   data List a = Nil | Cons a (List a)
2
3   error = error
4
5   head Nil = error
6   head (Cons a as) = a
7
8   tail Nil = Nil
9   tail (Cons a as) = as
```

1. Drücken Sie die für dieses Programm möglichen Transitionen als Termersetzungssystem über der Signatur $\Sigma = \{Nil, Cons, head, tail, error\}$ aus.
2. Identifizieren Sie alle Redexe in dem folgenden (als Σ -Term zu interpretierenden) Ausdruck:

$$head (Cons (head (Cons (tail Nil) (head Nil))) (Cons (tail Nil) error))$$

3. Die *Auswertungsstrategie* einer Programmiersprache ist der Teil ihrer Semantik, der die Reihenfolge festlegt, in welcher Teile von zusammengesetzten Ausdrücken bzw. Aussagen berechnet werden sollen. Eine Möglichkeit, dies zu formalisieren ist die Angabe einer "Reduktionsstrategie", das heißt, festzulegen, welcher der Redexe eines gegebenen Terms als nächstes reduziert werden soll.
 - a) Die bei Programmiersprachen am weitesten verbreitete Auswertungsstrategie ist die sogenannte *strikte* (engl. *eager* oder *strict*) Auswertung. Sie entspricht üblicherweise der *leftmost-innermost-Reduktion*, die auch als *applikative Reduktion* bezeichnet wird: Es wird jeweils der erste Redex reduziert, der bei einer *post-order*-Traversierung des Term-Baumes auftritt. Zeigen Sie, daß der obige Ausdruck unter leftmost-innermost-Reduktion divergiert.
 - b) Einige Programmiersprachen (darunter auch Haskell) verwenden eine nicht-strikte Auswertungsstrategie. Eine solche Strategie entsteht beispielsweise bei Verwendung der *leftmost-outermost-Reduktion* (auch als *normale Reduktion* bezeichnet), bei welcher der erste bei einer *pre-order*-Traversierung des Term-Baumes auftretende Redex reduziert wird. Zeigen Sie, daß der obige Ausdruck unter leftmost-outermost-Reduktion zu einer Normalform reduziert.

Lösung zu Teilaufgabe 1.: Es genügt, die Gleichungen des Programmcodes als Reduktionsregeln für Terme über der Signatur $\Sigma = \{Nil, Cons, head, tail, error\}$ (für $V = \{a, as\}$) aufzufassen:

$$error \rightarrow_0 error \tag{1}$$

$$head Nil \rightarrow_0 error \tag{2}$$

$$head (Cons a as) \rightarrow_0 a \tag{3}$$

$$tail Nil \rightarrow_0 Nil \tag{4}$$

$$tail (Cons a as) \rightarrow_0 as \tag{5}$$

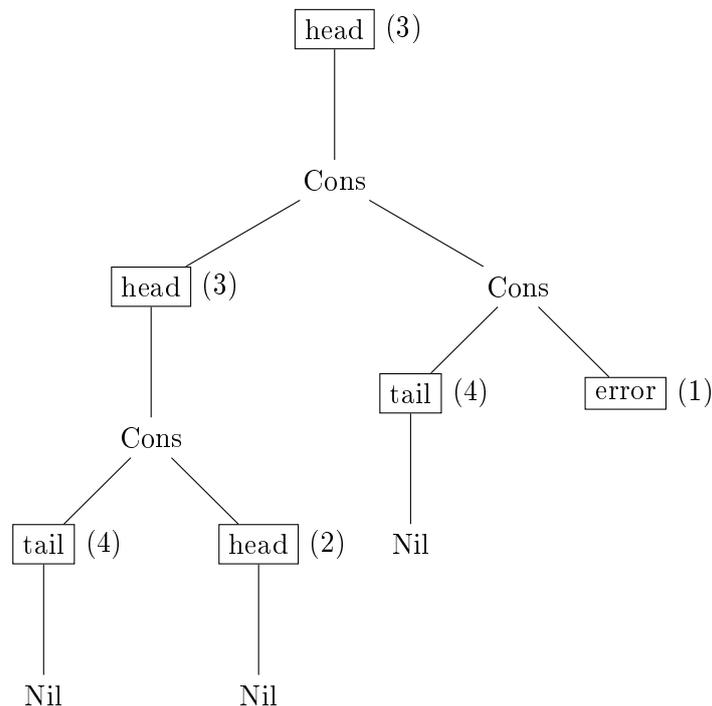


Abbildung 1: Termbaum von t ; die Wurzeln der Redexe von t sind durch Rechtecke markiert

Lösung zu Teilaufgabe 2.: Die Wurzeln der einzelnen Redexe des gegebenen Ausdrucks $t = \text{head}(\text{Cons}(\text{head}(\text{Cons}(\text{tail Nil})(\text{head Nil})))(\text{Cons}(\text{tail Nil}) \text{error}))$ sind in dem in Abb. 1 dargestellten Termbaum markiert. Ein Redex entspricht also dem an der jeweils markierten Stelle beginnenden Unterbaum des Termbaums. Weiterhin ist an jeder Markierung angegeben, aus welcher Reduktionsregel der entsprechende Redex hervorgeht.

Lösung zu Teilaufgabe 3.a): Unter Anwendung von applikativer (leftmost-innermost-)Reduktion erhalten wir die folgende unendliche Reduktionskette (wobei in jedem Schritt der jeweils ausgewählte Redex unterstrichen und die jeweils angewendete Regel angegeben ist):

$$\begin{aligned}
 & \text{head}(\text{Cons}(\text{head}(\text{Cons}(\underline{\text{tail Nil}})(\text{head Nil})))(\text{Cons}(\text{tail Nil}) \text{error})) && \text{Regel (4)} \\
 \rightarrow & \text{head}(\text{Cons}(\text{head}(\text{Cons Nil}(\underline{\text{head Nil}})))(\text{Cons}(\text{tail Nil}) \text{error})) && \text{Regel (2)} \\
 \rightarrow & \text{head}(\text{Cons}(\text{head}(\text{Cons Nil}(\underline{\text{error}})))(\text{Cons}(\text{tail Nil}) \text{error})) && \text{Regel (1)} \\
 \rightarrow & \text{head}(\text{Cons}(\text{head}(\text{Cons Nil}(\underline{\text{error}})))(\text{Cons}(\text{tail Nil}) \text{error})) && \text{Regel (1)} \\
 \rightarrow & \dots
 \end{aligned}$$

Lösung zu Teilaufgabe 3.b): Unter Anwendung von normaler (leftmost-outermost-)Reduktion erhalten wir die folgende in einer Normalform endende Reduktionskette (wobei in jedem Schritt der jeweils ausgewählte Redex unterstrichen und die jeweils angewendete Regel angegeben ist):

$\frac{\text{head} (\text{Cons} (\text{head} (\text{Cons} (\text{tail Nil}) (\text{head Nil}))) (\text{Cons} (\text{tail Nil}) \text{error}))}{\rightarrow \text{head} (\text{Cons} (\text{tail Nil}) (\text{head Nil}))}$	Regel (3)
$\rightarrow \underline{\text{tail Nil}}$	Regel (3)
$\rightarrow \text{Nil}$	Regel (4)
\nrightarrow	