Übungen zur "Theorie der Programmierung" - SoSe2015

Freitag 12:15-13:45, Martenstr. 3, Raum 02.133-113

Daniel Hausmann

daniel.hausmann@fau.de

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
Department Informatik

Lehrstuhl 8

July 9, 2015

Reguläre Ausdrücke

Sei Σ Alphabet.

Reguläre Ausdrücke über Σ

Syntax:

$$r, s := 1 \mid 0 \mid r + s \mid rs \mid r^* \mid a \qquad a \in \Sigma$$

Semantik:

- $L(1) = \{\epsilon\}$, $L(0) = \emptyset$, $L(a) = \{a\}$
- $L(r + s) = L(r) \cup L(s)$
- $L(rs) = \{uv \mid u \in L(r) \wedge v \in L(s)\}$
- $L(r^*) = \{u_1 \dots u_n \mid n \geq 0 \wedge u_1, \dots, u_n \in L(r)\} \ni \epsilon$

Übung 1

Geben Sie einen regulären Ausdruck für jede der folgenden Sprachen an und erläutern Sie Ihre Lösung.

1. Die Menge der Strings über $\Sigma = \{a, b, c\}$, die mindestens ein a und mindestens ein b enthalten.
2. Die Menge der Strings von Nullen und Einsen, in denen jedes Paar von aufeinanderfolgenden Nullen vor allen Paaren von aufeinanderfolgenden Einsen steht.
3. Die Menge der Strings von Nullen und Einsen, bei denen die Anzahl von Nullen ganzahlig durch fünf teilbar ist.

Pumping Lemma

Pumping Lemma

Ist L reguläre Sprache, so gilt:

$$\exists l \geq 1. \forall w \in L. |w| \geq l \Rightarrow$$
$$\exists u_1 v u_2 = w. |v| \geq 1 \wedge |u_1 v| \leq l \wedge u_1 v^* u_2 \subseteq L.$$

Übung 2

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage **wahr** oder **falsch** ist. Falls die Aussage wahr ist, beweisen Sie sie; falls die Aussage falsch ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

> *Wenn L eine unendliche reguläre Sprache über $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}\}$ ist, dann gibt es ein $s \in L$, so dass sich die jeweiligen Anzahlen der Nullen und Einsen in s unterscheiden.*

Übung 3

Es sei $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}, +, *, (,)\}$; zeigen Sie mithilfe des **Pumping-Lemmas**, dass die Sprache der wohlgeformten arithmetischen Ausdrücke über Σ nicht regulär ist.

Hinweis: Betrachten Sie insbesondere das Problem der korrekten Klammerung.

Übung 4

Es sei $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}, ;, (,)\}$ und L die Sprache der Σ-Strings s, so dass s der Form (a, b) ist, wobei a und b nicht-leere binäre Zahlen sind und a eine Zahl repräsentiert, die kleiner ist als die von b repräsentierte Zahl (also z.B. $(\underline{0010}; \underline{11}) \in L$, aber $(\underline{110}; \underline{10}) \notin L$). Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas, dass L nicht regulär ist.

Automaten

Nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA$^\epsilon$)

$A = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ mit

- endlicher Menge Q von Zuständen
- Alphabet Σ
- Transitionsfunktion $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$
- Startzustand s
- Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$

- **ϵ-freier NFA**: $\Delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$
- **DFA**: $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

Reguläre Sprachen

Worttransition

$\stackrel{v}{\Rightarrow} \subseteq Q \times Q$ ist definiert wie folgt:

- $q \stackrel{\epsilon}{\Rightarrow} q$
- Wenn $q \stackrel{u}{\Rightarrow} q'$ und $q'' \in \Delta(q', a)$, dann $q \stackrel{ua}{\Rightarrow} q''$
- Wenn $q \stackrel{u}{\Rightarrow} q'$ und $q'' \in \Delta(q', \epsilon)$, dann $q \stackrel{u}{\Rightarrow} q''$

Die von A akzeptierte Sprache ist $L(A) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists q \in F. s \stackrel{u}{\Rightarrow} q\}$.

Reguläre Sprachen

Die Menge der regulären Sprachen ist die Menge der Sprachen L, für die ein NFA$^\epsilon$ A mit $L(A) = L$ existiert.

Satz von Kleene

Satz von Kleene

Sprache L ist regulär g.d.w. ein regulärer Ausdruck r existiert, so dass $L = L(r)$.

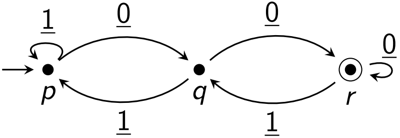
Übung 5

Geben Sie für jeden der folgenden regulären Ausdrücke zuerst einen äquivalenten nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA) mit ϵ-Transitionen entsprechend dem Beweis des Satzes von Kleene an und vereinfachen Sie dann diesen Automaten, falls möglich.

1. $(\underline{0} + \underline{1})\underline{01}$
2. $\underline{01}^*$
3. $\underline{00}(\underline{0} + \underline{1})^*$
4. $(\underline{0}^*\underline{1})^*$

Übung 6

Wir betrachten den folgenden deterministischen endlichen Automaten (DFA):



1. Geben Sie alle regulären Ausdrücke $R_{ij}^{\emptyset}$ für $i, j \in \{p, q, r\}$ an.
2. Geben Sie alle regulären Ausdrücke $R_{ij}^{\{p\}}$ für $i, j \in \{p, q, r\}$ an. Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich.
3. Geben Sie alle regulären Ausdrücke $R_{ij}^{\{p,q\}}$ für $i, j \in \{p, q, r\}$ an. Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich.
4. Geben Sie einen regulären Ausdruck für die vom Automaten akzeptierte Sprache an.