Übungen zur "Theorie der Programmierung" - SoSe2015

Freitag 12:15-13:45, Martenstr. 3, Raum 02.133-113

Daniel Hausmann

daniel.hausmann@fau.de

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen
Department Informatik

Lehrstuhl 8

April 24, 2015

Übungsabgabe

- Entsprechend gekennzeichnete Übungsaufgaben ("Hausaufgaben"), Lösungen können eingereicht werden
- Bearbeitungszeit: 3-4 Wochen pro Übungsblatt
- Abgabe freiwillig, individuell und eigenständig
- Abgabe in der Übung (oder per Mail)

Bonuspunkte

- Punkte für abgegebene Lösungen zählen als Bonuspunkte für Klausur (Verbesserung der Note, falls bestanden)
- Details zu Gesamtanzahl und Gewichtung der Punkte werden noch bekanntgegeben

Übungsablauf

- Primär: Besprechung von Übungsaufgaben (Präsenzaufgaben), u.a. als Vorbereitung auf die Hausaufgaben
- Wiederholung zentraler Konzepte aus der Vorlesung
- Beantwortung von Fragen zur Vorlesung, Aufgabestellungen etc.
- Besprechung von alten (Haus)Aufgaben (je nach Zeit/Wunsch)

Wiederholung aus der Vorlesung

Gegeben sei eine Signatur Σ und eine Menge von Variablen V.

Terme

Die Menge der Terme $T_\Sigma(V)$ ist induktiv definiert:

- Variable $v \in V$ ist ein Term
- Konstante $c_{/0} \in \Sigma$ (nullstelliges Funktionssymbol) ist ein Term
- Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und ist $f_{/n} \in \Sigma$ (n-stelliges Funktionssymbol), so ist $f(t_1, \ldots t_n)$ ein Term.

Wiederholung aus der Vorlesung

Substitution

Eine Substitution σ ist eine Funktion $\sigma : V \to T_\Sigma(V)$.
Notation: Anwendung von Substitution σ auf Term t: $t\sigma$

Kontext

Ein Kontext $C(\cdot)$ ist induktiv definiert:

$$C(\cdot) ::= (\cdot) \mid f(t_1, \dots, C(\cdot), \dots t_n)$$

für ein $f_{/n} \in \Sigma$.

Wiederholung aus der Vorlesung

Eine Relation $R \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V)$ heißt:

kontextabgeschlossen

$$\forall C(\cdot) \,.\, \forall t, s \,.\, tRs \Rightarrow C(t) R C(s)$$

stabil

$$\forall \sigma \,.\, \forall t, s \,.\, tRs \Rightarrow t\sigma R s\sigma$$

Wiederholung aus der Vorlesung

Termersetzungssystem (TES)

Ein Termersetzungssystem ist eine Relation $\rightarrow_0 \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V)$

Einschrittreduktion

$\rightarrow \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V)$ ist der kontextabgeschlossene, stabile Abschluss von $\rightarrow_0$

$\rightarrow^*$ Reduktion
$\leftrightarrow^*$ Konvertierbarkeit

Redex (REDucible EXpression)

Ein Term t heisst <u>Redex</u>, wenn es eine Regel $l \rightarrow_o r$ und eine Substitution σ gibt, so dass $t = l\sigma$.

Wiederholung aus der Vorlesung

Normalform

- Ein Term t ist normal, wenn $t \not\to$
- Term t ist Normalform von Term s, wenn t normal und $s \to^* t$.

Normalisierung

Ein Term heißt:

- schwach normalisierend, wenn eine Ableitungskette existiert die in einer Normalform endet.
- stark normalisierend oder terminierend, wenn jede Ableitungskette in einer Normalform endet.

Ein TES, in dem jeder Term stark (schwach) normalisierend ist, ist stark (schwach) normalisierend.

Wiederholung aus der Vorlesung

$R \subseteq T_\Sigma(V) \times T_\Sigma(V)$ heißt

wohlfundiert

Es existiert keine unendliche Folge $x_0 R x_1 R x_2 \ldots$.

Reduktionsordnung

R ist stabil, kontextabgeschlossen, wohlfundiert, strikte Ordnung (irreflexiv, transitiv).

Terminierungsbeweis

Satz

Wenn $>$ Reduktionsordnung und $\forall t, s \,.\, t \to_0 s \Rightarrow t > s$, dann ist $\to_0$ stark normalisierend (i.e. terminierend).

Wiederholung aus der Vorlesung

Polynomordnungen

Eine polynomielle Interpretation $\mathcal{A} = \langle A, p_{f_1}, \dots, p_{f_n} \rangle$ besteht aus einer Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ und für alle $f_{i/m} \in \Sigma$ einem streng monotonen Polynom $p_{f_i} \in \mathbb{N}[X_1, \dots, X_m]$ mit

$$\forall a_1, \dots, a_m \in A \Rightarrow p_{f_i}(a_1, \dots, a_m) \in A$$

Die von $\mathcal{A}$ induzierte Polynomordnung $\succ_{\mathcal{A}}$ über Termen ist definiert als

$$t \succ_{\mathcal{A}} t' \Leftrightarrow p_t >_A p_{t'}$$

wobei $p_x = x$, $p_{f(t_1,\dots,t_n)} = p_f(p_{t_1}, \dots, p_{t_n})$ und

$$p >_A q \Leftrightarrow \forall a_1, \dots, a_n \in A. p(a_1, \dots, a_n) > q(a_1, \dots, a_n)$$

Wiederholung aus der Vorlesung

Terminierung eines TES R mittels Polynomordnung $\succ_{\mathcal{A}}$ zeigen:

1. Sicherstellen, dass $\mathcal{A}$ eine polynomielle Interpretation ist, und
2. zeigen, dass für jede Regel $l \rightarrow_0 r$ des TES gilt: $l \succ_{\mathcal{A}} r$.

Übung 1 - Aufwärmung

Es sei Σ eine Signatur mit vier Konstanten A, B, C und D sowie einem binären Funktionssymbol $\cdot$, welches wir als Infix-Operator verwenden (d.h., wir schreiben $s \cdot t$ anstelle von $\cdot(s,t)$). Wir betrachten das folgende Termersetzungssystem:

$$A \cdot x \to_0 B \cdot (C \cdot x) \tag{1}$$

$$C \cdot (D \cdot x) \to_0 B \cdot (C \cdot x) \tag{2}$$

$$B \cdot (x \cdot y) \to_0 A \cdot (D \cdot x) \tag{3}$$

$$B \cdot (B \cdot x) \to_0 (D \cdot x) \tag{4}$$

Zeigen Sie, dass dieses System nicht stark normalisierend ist, indem Sie einen Σ-Term t sowie eine unendliche Derivation $t \to t_1 \to t_2 \to t_3 \ldots$ angeben.

Übung 2 - applikative vs. normale Reduktion

```
data List a = Nil | Cons a (List a)
error = error
head Nil = error
head (Cons a as) = a
tail Nil = Nil
tail (Cons a as) = as
```

1. Drücken Sie die für dieses Programm möglichen Transitionen als Termersetzungssystem über einer geeigneten Signatur aus.
2. Identifizieren Sie alle Redexe in dem folgenden Ausdruck:

head (Cons (head (Cons (tail Nil) (head Nil))) (Cons (tail Nil) error))

3. Zeigen Sie, dass der Ausdruck unter aplikativer Reduktion divergiert.
4. Zeigen Sie, dass der Ausdruck unter normaler Reduktion zu einer Normalform reduziert.

Übung 4 - Terminierungsbeweis mittels Polynomordnung

Wir betrachten das folgende TES für $\Sigma = \{\oplus, \odot\}$:

$$x \odot (y \oplus z) \to_0 (x \odot y) \oplus (x \odot z)$$
$$(x \oplus y) \oplus z \to_0 x \oplus (y \oplus z)$$

Hinweis: $p_\odot(x, y) := xy \qquad p_\oplus(x, y) := 2x + y + 1$

1. Zeigen Sie, dass mit der einfachsten polynomiellen Interpretation die Terminierung nicht bewiesen werden kann.
2. Finden Sie eine geeignete Domäne $B \subset \mathbb{N}$ um die Terminierung des Systems zu zeigen.
3. Wir ersetzen die zweite Reduktionsregel durch

$$x \oplus (y \oplus z) \to_0 (x \oplus y) \oplus z$$

   Zeigen Sie unter Verwendung einer Polynomordnung, dass das so erhaltene System ebenfalls terminierend ist.