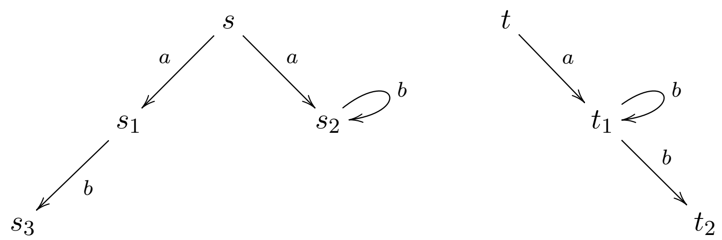
Übungsblatt 4

Abgabe der Lösungen: 01.07.15

(Aufgaben teils aus Aceto et al., Reactive Systems.)

Aufgabe 1 Partition Refinement (5 Punkte)

Verwenden sie den Partition-Refinement-Algorithmus, um die Bisimilaritätsrelation auf



zu berechnen.

Aufgabe 2 Beschränkte Bisimulation (15 Punkte)

Man definiert eine Familie $(\sim_i)_{i\geq 0}$ von Relationen auf einem LTS $T = (Q, \mathsf{Act}, (\xrightarrow{\alpha})_{\alpha\in\mathsf{Act}})$ durch

- $s \sim_0 t$ stets
- $s \sim_{i+1} t$ gdw. für jede Aktion $\alpha \in \mathsf{Act}$ gilt:
  - Wenn $s \xrightarrow{\alpha} s'$, dann existiert t' mit $t \xrightarrow{\alpha} t'$ und $s' \sim_i t'$
  - Wenn $t \xrightarrow{\alpha} t'$, dann existiert s' mit $s \xrightarrow{\alpha} s'$ und $s' \sim_i t'$.

a) Zeigen Sie, dass $s \sim_i t$ gdw. s und t in der i-ten Iteration des Partition-Refinement-Algorithmus noch äquivalent sind.

b) Definieren Sie für jedes i einen Begriff von Bisimulation, der $\sim_i$ charakterisiert in dem Sinne, dass $s \sim_i t$ gdw. es eine Bisimulation gibt, die s und t in Beziehung setzt. Beweisen Sie diese Charakterisierung. (*Hinweis:* Man verwendet zweckmäßigerweise hier *Familien* von Relationen als Bisimulationen.)

c) Geben Sie eine spieltheoretische Charakterisierung von $\sim_i$ an und beweisen Sie diese.

d) Geben Sie ein Fixpunktcharakterisierung von $\sim_i$ an und beweisen Sie diese. Welche partielle Ordnung verwenden Sie?

e) Welche Komplexität hat der aus der Fixpunktcharakterisierung erwachsende Algorithmus (für Q endlich)? Geben Sie (mit Begründung) das Laufzeitverhalten in O-Notation an, in Abhängigkeit von der Anzahl n von Zuständen und der Anzahl m von Transititionen.

f) Zeigen Sie, dass $\sim = \bigcap_{i \geq 0} \sim_i$, wenn T endlich verzweigend ist. Zeigen Sie (per Gegenbeispiel), dass die Gleichheit *ohne* endliche Verzweigung nicht gilt.

g) Der *Rang* einer modalen Formel ϕ ist die maximale Schachtelungstiefe von Modaloperatoren in ϕ. Zeigen Sie, dass $\sim_i$ zusammenfällt mit logischer Äquivalenz $\equiv_i$ bezüglich Formeln vom Rang höchstens i, *sofern* wir annehmen, dass die Menge der Aktionen endlich ist. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass $\equiv_i$ *endlichen Index* hat, d.h. nur endlich viele Äquivalenzklassen.

Folgern Sie (ohne den Satz von Hennessy/Milner zu verwenden), dass für endlich verzweigendes T logische Äquivalenz und Bisimilarität zusammenfallen.