Übungsblatt 7

Abgabe der Lösungen: Tutorium in der Woche 17.06-21.06

Aufgabe 1 Unifikation (8 Punkte)

Berechnen Sie mittels des Unifikationalgorithmus einen allgemeinsten Unifikator für die folgenden Paare von Formeln, bzw. zeigen Sie ggf., dass die Formeln nicht unifizierbar sind.

1. $\mathsf{plus}(\mathsf{plus}(X, Z), Y)$ und $\mathsf{plus}(Y, \mathsf{plus}(\mathsf{o}, \mathsf{plus}(\mathsf{o}, Z)))$;
2. $\mathsf{comma}(X, \mathsf{comma}(Y, Z))$ und $\mathsf{comma}(\mathsf{comma}(Y, X), Z)$;
3. $\mathsf{link2}(\mathsf{link3}(\mathsf{a}, Y, Z), X)$ und $\mathsf{link2}(X, \mathsf{link3}(\mathsf{a}, Y, Y))$;
4. $\mathsf{branch}(Y, \mathsf{branch}(Y, \mathsf{branch}(X, Y)))$ und $\mathsf{branch}(\mathsf{branch}(Z, Y), \mathsf{branch}(Z, \mathsf{end}))$.

Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel des Unifikationalgorithmus.

Was passiert, wenn man den Occurs-Check aus dem Unifikationsalgorithmus weglässt, d.h. (elim) auf $X \doteq E$ anwendet, ohne zu prüfen, ob $X \in \mathit{Vars}(E)$?

Präsenzaufgabe: Unifikation (0 Punkte)

Berechnen Sie mittels des Unifikationalgorithmus einen allgemeinsten Unifikator für die folgenden Paare von Formeln, bzw. zeigen Sie ggf., dass die Formeln nicht unifizierbar sind.

1. $\mathsf{plus}(\mathsf{plus}(X, \mathsf{o}), Y)$ und $\mathsf{plus}(\mathsf{plus}(Y, \mathsf{o}), \mathsf{plus}(\mathsf{o}, \mathsf{plus}(\mathsf{o}, \mathsf{plus}(Z, \mathsf{o}))))$;
2. $\mathsf{comma}(\mathsf{comma}(X, Y), \mathsf{comma}(Y, X))$ und $\mathsf{comma}(\mathsf{comma}(Y, X), Z)$;
3. $\mathsf{link2}(\mathsf{link3}(\mathsf{a}, Y, \mathsf{link3}(\mathsf{a}, \mathsf{b}, Z)), X)$ und $\mathsf{link2}(X, \mathsf{link3}(\mathsf{a}, Y, Y))$;
4. $\mathsf{branch}(X, \mathsf{branch}(\mathsf{end}, \mathsf{end}))$ und $\mathsf{branch}(\mathsf{branch}(Z, Y), \mathsf{branch}(X, \mathsf{end}))$.

Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel des Unifikationalgorithmus.

Aufgabe 2 Präordnung über Substitutionen (8 Punkte)

Eine zweistellige Relation $\lesssim$ auf einer Menge M heißt eine *Präordnung* (en: *preorder*), wenn für alle $a, b, c \in M$ folgendes gilt:

Reflexivität: $a \lesssim a$,

Transitivität: wenn $a \lesssim b$ und $b \lesssim c$, dann $a \lesssim c$.

Eine Präordnung $\lesssim$ heißt *partielle Ordnung*, wenn zusätzlich gilt:

Antisymmetrie: Wenn $a \lesssim b$ und $b \lesssim a$, dann $a = b$.

Sei nun $\trianglelefteq$ die Relation auf Substitutionen, so dass $\sigma \trianglelefteq \theta$ gdw. θ allgemeiner als σ ist; d.h. $\sigma \trianglelefteq \theta$ gdw. es eine Substitution γ gibt, so dass $\sigma = \theta\gamma$.

1. Beweisen Sie, dass $\trianglelefteq$ eine Präordnung ist.

2. Beweisen Sie, dass $\trianglelefteq$ keine partielle Ordnung ist.

3. Hat $\trianglelefteq$ ein größtes Element σ (d.h. $\theta \trianglelefteq \sigma$ für alle θ)? Wenn ja: welches?

4. Hat $\trianglelefteq$ ein kleinstes Element σ (d.h. $\sigma \trianglelefteq \theta$ für alle θ)? Wenn ja: welches?

Begründen Sie ihre Antworten.

Aufgabe 3 Idempotente Substitutionen (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass das Unifikationsverfahren im Erfolgsfall stets eine *idempotente* Substitution σ liefert, d.h. $\sigma\sigma = \sigma$.

Bonusaufgabe (2 Punkte)

Beweisen Sie, dass eine Substitution σ idempotent ist g.d.w. $\mathit{Dom}(\sigma) \cap \mathit{Ran}(\sigma) = \emptyset$, wobei $\mathit{Ran}(\sigma) = \bigcup_{X \in \mathit{Dom}(\sigma)} \mathit{Vars}(\sigma(X))$. (Achtung: i.a. ist $\mathit{Ran}(\sigma) \neq \mathit{Vars}(\sigma)$!)