Übungsblatt 2

Abgabe der Lösungen: Tutorium in der Woche 13.05-17.05

Aufgabe 1 Erfülltheit von Formeln (5 Punkte)

Füllen Sie die folgende Tabelle mit Wahrheitsbelegungen aus, so dass die entsprechende Formel jeweils erfüllt bzw. nicht erfüllt ist.

Formel	Erfüllt	Nicht erfüllt
$A \wedge \neg B \wedge \neg C$		
$(\neg A \vee B) \to (A \wedge C)$		
$\neg A \vee (A \wedge C) \vee \neg C$		
$\neg A \vee (A \to (B \wedge C))$		
$A \wedge \neg(A \to (\neg A \wedge B \wedge \neg C))$		

Aufgabe 2 Positives Denken [Präsenzaufgabe: keine Abgabe nötig] (0 Punkte)

Sei ϕ eine aussagenlogische Formel, die wie in der Vorlesung aus Konjunktion, Negation und Atomen aufgebaut ist. Wir definieren rekursiv, dass ein Atom A *positiv* (*negativ*) in ϕ ist, wenn

- ϕ ein Atom ist (ϕ ein Atom ist außer A);
- $\phi = \neg\psi$ und A negativ (positiv) in ψ ist;
- $\phi = \psi \wedge \xi$ und A in ψ und in ξ positiv (negativ) ist.

Beweisen Sie (auf der Basis von Definitionen aus der Vorlesung), dass ϕ erfüllbar ist, wenn jedes Atom in ϕ entweder positiv oder negativ ist. Kann eine solche Formel auch gültig sein?

Hinweis: Verwenden Sie Induktion über den Aufbau von ϕ wie in der Vorlesung besprochen. Man muss in der Induktion in Wirklichkeit eine stärkere Aussage als die verlangte beweisen, indem man auch darüber redet, welche Wahrheitsbelegungen ϕ wahr bzw. falsch machen.

Aufgabe 3 Negationsnormalform (7 Punkte)

Eine aussagenlogische Formel ist in *Negationsnormalform (NNF)*, wenn sie durch die folgende Grammatik erzeugt werden kann:

$$\phi, \psi = A \mid \neg A \mid \phi \wedge \psi \mid \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \qquad (A \in \mathsf{At}).$$

Sei ϕ eine aussagenlogische Formel. Beweisen Sie durch Induktion über den Aufbau von ϕ, dass ϕ zu einer Formel in NNF logisch äquivalent sind.

Hinweis: Die Definition von NNF aus der Vorlesung ist für die Lösung dieser Aufgabe nicht relevant, auch wenn sie zu der oben angegebenen letztlich äquivalent ist. Insbesondere kommen in Formeln für Zwecke dieser Übung keine expliziten Disjunktionen $\vee$ vor.

Aufgabe 4 Syntax trifft Semantik (8 Punkte)

Seien ϕ und ψ zwei aussagenlogische Formeln wie in Aufgabe 2. Wir bezeichnen mit $\phi[\psi/A]$ die Formel, die wir erhalten, indem wir in ϕ jedes Vorkommen des Atoms A durch ψ ersetzen. Formal wird $\phi[\psi/A]$ wie folgt recursiv definiert:

- $A[\psi/A] = \psi$
- $B[\psi/A] = B$ wenn $B \in \mathsf{At} - \{A\}$;
- $(\neg\phi)[\psi/A] = \neg(\phi[\psi/A])$;
- $(\psi \wedge \xi)[\psi/A] = \psi[\psi/A] \wedge \xi[\psi/A]$.

Beweisen Sie, dass die Formeln $\phi[\psi/A]$ und $(\phi[\top/A] \wedge \psi) \vee (\phi[\bot/A] \wedge \neg\psi)$ logisch äquivalent sind.

Hinweis: Es wird empfohlen, zunächst die folgende Hilfsaussage durch Induktion über den Aufbau von ϕ zu beweisen: für jede Wahrheitsbelegung κ gilt $\kappa \models \phi[\psi/A] \iff \kappa \models \phi[\kappa(\psi)/A]$, wobei $\kappa(\psi) = \top$, wenn $\kappa \models \psi$, und $\kappa(\psi) = \bot$ sonst.