Vollständige Induktion

1 Einführung

Dieses Handout soll dem Zweck dienen, vollständige Induktion über natürliche Zahlen und Induktion über den Aufbau einer Formel möglichst ausführlich und anschaulich zu erklären. Fragen, Verbesserungsvorschläge und Fehler bitte an thomas.voss@studium.uni-erlangen.de mailen.

2 „Klassische" Induktion über natürliche Zahlen

Bei der „Induktion" über natürliche Zahlen nutzt man die Struktur der natürlichen Zahlen aus, die wie folgt dargestellt werden kann:

$$1 \to 2 \to 3 \to \dots$$

Formal ist diese Struktur durch die sogenannten Peano-Axiome, die die Menge der natürlichen Zahlen beschreiben, gegeben. Wenn man nun beweisen will, dass eine Aussage $P(n)$, die von einer natürlichen Zahl n abhängt (z.B. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$), für alle natürlichen Zahlen beweisen will, geht man folgendermaßen vor:

1. Man beweist, dass die Aussage $P(1)$ gilt, dass also die Aussage für die erste natürliche Zahl gilt.
2. Man zeigt, dass, angenommen die Aussage $P(n)$ gilt, auch die Aussage $P(n+1)$ gilt.

Zur Begrifflichkeit:

- Die zu beweisende Aussage ist: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$
- Den Beweis der Aussage für die erste natürliche Zahl $P(1)$ nennt man Induktionsanfang (I.A.).
- Im zweiten Beweisschritt nennt man die Aussage $P(n)$ Induktionsvoraussetzung (I.V.), da man unter der Voraussetzung $P(n)$ schließt, dass auch die Aussage $P(n+1)$ gilt.
- Den gesamten zweiten Beweisschritt (von $P(n)$ nach $P(n+1)$) nennt man Induktionsschritt (I.S.), da man hier quasi einen „Schritt" von einer Aussage zur nächsten macht.

Erklärung der Korrektheit auf zwei Arten:

1. Konstruktive Erklärung:
   Zunächst hat man im I.A. gezeigt, dass die Aussage $P(1)$ gilt. Im I.S. hat man gezeigt, dass aus $P(n)$ auch $P(n+1)$ folgt. Beides kombiniert ergibt zunächst, dass auch $P(1+1) = P(2)$ gilt. Das mit dem I.S. kombiniert ergibt wiederum $P(3)$ etc. Man erhält also folgendes Diagramm:
   $$P(1) \Rightarrow^{I.S.} P(2) \Rightarrow^{I.S.} P(3) \Rightarrow^{I.S.} \dots$$
2. Indirekte Erklärung:
   Sei $M = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ gilt nicht}\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, für die die Aussage nicht gilt. Wenn es eine natürliche Zahl gibt, für die die Aussage nicht erfüllt ist, ist M nicht leer. Dann hat M aber ein kleinstes Element n'. n' ist wiederum nicht 1, da wir gezeigt haben, dass $P(1)$ gilt. Dann ist aber wiederum $n' - 1 \in \mathbb{N}$ und $n' - 1 < n'$. Damit gilt $P(n' - 1)$, da sonst n' nicht das kleinste Element von M wäre. Nach dem I.S. gilt damit aber auch $P(n')$, was zum Widerspruch führt. Damit hat M kein kleinstes Element, ist somit leer und die Aussage gilt für alle natürlichen Zahlen.

Bemerkung 1. *Wichtig: Auch wenn der Induktionsanfang im Vergleich zum Induktionsschritt klein und unwichtig erscheint, ist er doch absolut notwendig.*

Beispiel 1. *Wir wollen die Aussage* $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *zeigen. Dazu zeigen wir zunächst den I.A.:*

Proof. I.A.: $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1*2}{2}$$

Hier haben wir also gezeigt, dass die Aussage für $n = 1$ gilt. Jetzt der I.S.:
I.S.: $n \to n + 1$
Wir nehmen nun an, dass $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ gilt. Also: I.V.: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Damit zeigen wir jetzt die Aussage für $n + 1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = (\sum_{k=1}^{n} k) + (n+1) \overset{I.V.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Wir haben also geschlossen, dass die Aussage für $n + 1$ gilt. Dort wo über dem „=" I.V. steht, zeigen wir an, dass wir die I.V. benutzt haben. Der Rest der Gleichheitszeichen begründet sich durch elementare arithmetische Umformungsschritte. Wir können nun also schlussfolgern, dass die angegebene Summenformel für alle natürlichen Zahlen gilt. □

Beispiel 2. *Hier nun ein Beispiel, wieso der I.A. unbedingt erforderlich ist. Wir wollen die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : n = n + 1$ „beweisen". Dass diese Aussage absurd ist, sollte schnell ersichtlich sein. Zum „Beweis" hier die Induktion ohne Anfang:*
I.S.: $n \to n + 1$
I.V.: $n = n + 1$

$$n + 1 =^{I.V.} (n + 1) + 1 = n + 2$$

Der Fehlschluss ist nun, dass $n = n + 1$ in den natürlichen Zahlen gilt. Ohne Induktionsanfang ist der Beweis aber nunmal unvollständig und die Aussage bleibt (zum Glück) unbewiesen.

3 Course-of-Values-Induktion

Um zu zeigen, dass $P(n + 1)$ gilt, genügt es manchmal nicht, nur zu wissen, dass $P(n)$ gilt. Stattdessen benötigt man manchmal, dass auch $P(n - 1)$ oder sogar $\forall k \leq n : P(k)$ gilt. Eine Induktion, die letztere Aussage als I.V. benutzt, nennt man Course-of-Values-Induktion. Die Struktur des Beweises sieht dann folgendermaßen aus:

1. Man beweist, dass die Aussage $P(1)$ gilt, dass also die Aussage für die erste natürliche Zahl gilt.
2. Man zeigt, dass, angenommen $\forall k \leq n : P(k)$ gilt, auch die Aussage $P(n + 1)$ gilt.

Im Grunde ändert sich also kaum etwas, außer, dass die vorherige I.V. („$P(n)$ gilt.") mit „$\forall k \leq n : P(k)$ gilt." ersetzt wird.

4 Induktion über die Struktur von Formeln

Die Menge der aussagenlogischen Formeln (hier mit Φ bezeichnet) ist durch folgende Grammatik in Backus-Naur-Form (BNF) gegeben:

$$\varphi, \psi ::= A \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi$$

Das bedeutet im Einzelnen folgendes:

1. Atome, die wir z.B. durch Großbuchstaben ($A, B, \ldots$ oder $A_1, A_2, \ldots$) bezeichnen, sind Formeln.
2. Wenn φ eine Formel ist, dann ist auch $\neg\varphi$ eine Formel.
3. Wenn φ, ψ Formeln sind, dann ist $\varphi \wedge \psi$ eine Formel.

Dazu kommt noch, dass die Menge Φ die kleinste Menge ist, die diese drei Eigenschaften erfüllt. Das benötigt man, damit jede Formel wirklich nur durch Atome, Negation ($\neg$) und Konjunktion ($\wedge$) aufgebaut wird. Somit gehören folgende Zeichenfolgen zu der Menge der Formeln:

1. $A, B, C, \ldots$
2. $\neg A, \neg B, \neg C, \ldots$ (Durch Negationsregel und 1.)
3. $A \wedge B, B \wedge A, A \wedge C, B \wedge C, \ldots$ (Durch Konjunktion von 1. mit 1.)

4. $\neg\neg A, \neg\neg B, \ldots$ (Negationsregel mit 2.)
5. $\neg(A \wedge B), \ldots$ (Negationsregel mit 3.)
6. $\neg A \wedge A, A \wedge \neg B, \ldots$ (Konjunktionsregel mit 1. und 2.)
7. $A \wedge (A \wedge B), C \wedge (B \wedge A), \ldots$ (Konjunktion von 1. und 3.)

Sowie alle weiteren Zeichenfolgen, die sich gemäß dem selben Prinzip ergeben (Anwendung von Negations-, bzw. Konjunktionsregel auf schon vorhandene Zeichenfolgen).

Auf ähnliche Weise lässt sich eine Grammatik für natürliche Zahlen angeben:

$$n ::= 0 \mid n+1$$

Damit ergibt sich analog folgendes Schema von Elementen der natürlichen Zahlen:

1. 0
2. $0+1$ (Nachfolgerregel auf 1. angewandt)
3. $0+1+1$ (Nachfolgerregel auf 2. angewandt)

Die Idee ist jetzt, die Induktion über natürliche Zahlen derartig zu verallgemeinern, dass man sie auf allgemeine Grammatiken in BNF und insbesondere auf die Grammatik der aussagenlogischen Formeln anwenden kann. Wir halten dabei fest:

- Es gibt sowohl bei den natürlichen Zahlen als auch bei den Formeln eine Startregel. Bei den natürlichen Zahlen ist dies die Einführung der 0 als kleinstes Element, bei den Formeln die Einführung von Atomen als „kleinste" Formeln.
- Es gibt sowohl bei den natürlichen Zahlen als auch bei den Formeln Regeln, wie man aus diesen „kleinsten" Elementen alle weitere gewinnen kann. Bei den natürlichen Zahlen ist dies die Konstruktion eines Nachfolgers $n+1$ zu jeder Zahl n, bei den Formeln Negation $(\neg\varphi)$ einer schon vorhandenen Formel φ und Konjunktion $(\varphi \wedge \psi)$ zweier schon vorhandener Formeln (φ, ψ).

Daraus ergibt sich dann folgende Beweisidee:
Wir wollen zeigen, dass eine Aussage $P(\varphi)$, die abhängig von einer Formel (φ) ist, für alle Formeln gilt. Das tun wir nach folgendem Schema:

1. Zunächst beweisen wir, dass die Aussage $P(A)$, also für Atome gilt.
2. Dann beweisen wir, dass, angenommen, die Aussage $P(\varphi)$ gilt, auch die Aussage $P(\neg\varphi)$ gilt.
3. Zuletzt beweisen wir noch, dass, angenommen, die Aussagen $P(\varphi)$ und $P(\psi)$ gelten, auch die Aussage $P(\varphi \wedge \psi)$ gilt.

Dabei ist 1. der I.A., 2. und 3. Induktionsschritte, wobei bei 2. $P(\varphi)$ I.V. ist und bei 3. $P(\varphi)$ und $P(\psi)$ I.V. sind. Wenn wir diese 3 Teile bewiesen haben, können wir die Aussage quasi durch den Aufbau der Formeln schleppen. Das sieht dann analog zu oben wie folgt aus:

1. $P(A), P(B), P(C), \ldots$
2. $P(\neg A), P(\neg B), P(\neg C), \ldots$ (Erster I.S. auf 1. angewandt)
3. $P(A \wedge B), P(B \wedge A), P(A \wedge C), P(B \wedge C), \ldots$ (Zweiter I.S. mit 1. und 1.)
4. $P(\neg\neg A), P(\neg\neg B), \ldots$ (Erster I.S. mit 2.)
5. $P(\neg(A \wedge B)), \ldots$ (Erster I.S. mit 3.)
6. $P(\neg A \wedge A), P(A \wedge \neg B), \ldots$ (Zweiter I.S. mit 1. und 2.)
7. $P(A \wedge (A \wedge B)), P(C \wedge (B \wedge A)), \ldots$ (Zweiter I.S. mit 1. und 3.)

Das Schema lässt sich beliebig fortsetzen und liefert damit für jede Formel den Beweis der gewollten Aussage.

Beispiel 3. *Folgendes Beispiel ist aus dem inoffiziellen Skript:*
Wir wollen zeigen, dass die Erfülltheit einer Formel nur von den Wahrheitswerten der in ihr vorkommenden Atome abhängt. So ist für $A \wedge B$ beispielsweise egal welchen Wert C annimmt. Formal wollen wir zeigen:

$$\textit{z.z.: Für jede Formel } \varphi \textit{ gilt: } (\forall A \in At(\varphi) : \kappa(A) = \kappa'(A)) \Rightarrow (\kappa \models \varphi \Rightarrow \kappa' \models \varphi)$$

Wenn also zwei Wahrheitsbelegungen κ und κ' auf den Atomen einer Formel übereinstimmen und κ φ erfüllt, dann erfüllt auch κ' φ.

Proof. Wir beweisen per Induktion, dass $(\forall A \in At(\varphi) : \kappa(A) = \kappa'(A)) \Rightarrow (\kappa \vDash \varphi \Rightarrow \kappa' \vDash \varphi)$ für jede Formel ϕ gilt.
I.A.: $\varphi = A$

$$\kappa \vDash A \Rightarrow \kappa(A) = \top \overset{A \in At(A)}{\Rightarrow} \kappa'(A) = \top \Rightarrow \kappa' \vDash \varphi$$

Damit folgt also die Aussage für atomare Formeln, da $At(A) = \{A\}$.

I.S. 1: $\varphi \to \neg\varphi$
I.V.: $(\forall A \in At(\varphi) : \kappa(A) = \kappa'(A)) \Rightarrow (\kappa \vDash \varphi \Rightarrow \kappa' \vDash \varphi)$
Es sollen also nun κ, κ' auf den Atomen von $\neg\varphi$ übereinstimmen.
Dafür halten wir zuerst fest, dass $At(\neg\varphi) = At(\varphi)$. Damit stimmen κ, κ' also auch auf den Atomen von φ überein. Daraus bekommen wir also:

$$\kappa \vDash \neg\varphi \Rightarrow \kappa \nvDash \varphi \overset{I.V.}{\Rightarrow} \kappa' \nvDash \varphi \Rightarrow \kappa' \vDash \neg\varphi$$

Wir haben also mithilfe der Induktionsvoraussetzung gefolgert, dass die Aussage auch für $\neg\varphi$ gilt.

I.S. 2: $\varphi, \psi \to \varphi \wedge \psi$
I.V.: $(\forall A \in At(\varphi) : \kappa(A) = \kappa'(A)) \Rightarrow (\kappa \vDash \varphi \Rightarrow \kappa' \vDash \varphi)$ und $(\forall A \in At(\psi) : \kappa(A) = \kappa'(A)) \Rightarrow (\kappa \vDash \psi \Rightarrow \kappa' \vDash \psi)$
Wenn κ, κ' auf den Atomen von $\varphi \wedge \psi$ übereinstimmen, stimmen sie auch jeweils auf den Atomen von φ und ψ überein. Damit gilt:

$$\kappa \vDash \varphi \wedge \psi \Rightarrow \kappa \vDash \varphi \text{und} \kappa \vDash \psi \overset{I.V.}{\Rightarrow} \kappa' \vDash \varphi \text{und} \kappa' \vDash \psi \Rightarrow \kappa' \vDash \varphi \wedge \psi$$

Damit haben wir den 2. I.S. ebenfalls getan und folgern, dass unsere Aussage für alle Formeln gilt. □

Bemerkung 2. *Ein paar Tips zur Induktion*

- *Zu allererst ist es wichtig, zu verstehen, was eigentlich bewiesen werden soll, was die Begriffe, die in der Aufgabenstellung erwähnt werden, anschaulich, aber vor allem formal bedeuten. Wenn man keine korrekte, formale Definition z.B. von logischer Konsequenz kennt, kann man auch nicht beweisen, dass eine Formel logische Konsequenz einer anderen ist. Im Zweifelsfalle sollte man einen Begriff beispielsweise im inoffiziellen Skript nachschlagen.*

- *Nachdem man sich also klargemacht hat, was bewiesen werden soll, ist es ratsam, dies (möglichst formal) festzuhalten und an den Anfang der Lösung mit einem „z.z.:" für „zu zeigen" zu schreiben.*

- *Als zweiten Schritt sollte man sich überlegen, wie man den Beweis führt. Bei einem Induktionsbeweis gehört dazu, über welche Aussage und über welche Formel bzw. Struktur man Induktion führen will. Manchmal ist es nötig oder hilfreich, eine stärkere Aussage zu beweisen, als diejenige, die eigentlich gezeigt werden soll. Die so gezeigte Aussage sollte dann die zu zeigende auf eine einfache Weise implizieren. Für zweiteres ein Beispiel: Wenn ich zeigen will, dass es zu jeder Formel eine äquivalente in CNF gibt, dann macht es keinen Sinn, über den Aufbau der Formel in CNF eine Induktion zu machen. Statt dessen sollte man über den Aufbau der Formel, zu der man eine äquivalente in CNF finden will, induzieren.*

- *Des weiteren ist es auch wichtig, zu wissen, für welche Grammatik man die Aussage beweist. In den meisten Fällen genügt zu zeigen, dass eine Aussage für Formeln, die durch Atome, Negation und Konjunktion erzeugt werden, wahr ist. In manch anderen muss man noch Disjunktion und eventuell sogar Implikation als zusätzliche Konstrukte zulassen.*

- *Als ersten, da einfachsten Beweisschritt sollte man den Induktionsanfang zeigen. Hier hat man noch keine I.V., die man benutzen koennte, dafür geht der Beweis, sobald man verstanden hat, was formal zu zeigen ist, normalerweise recht leicht.*

- *In den Induktionsschritten müssen zuallererst die jeweiligen Induktionsvoraussetzungen - die bei den verschiedenen Schritten auch verschieden sind - formuliert werden. Um dann die Aussage für die „größere" Formel zu zeigen, reduziere ich das Problem auf das kleinere oder die kleineren Teilprobleme und benutze hier die Induktionsvoraussetzung. Anschaulich: Wenn ich eine Aussage für $\varphi \wedge \psi$ zeigen will, zerlege ich das Problem auf die Aussagen für φ und ψ, wende hier meine I.V. an und setzte das ganze wieder zusammen.*

- *Im Induktionsschritt ist oft etwas Kreativität gefragt, um das Problem richtig zu zerlegen und wieder zusammenzusetzen. Wenn dies partout nich funktionieren will, sollte man sich zunächst begriffs- und definitionssicher machen. Um das Problem aufzulösen, muss man oftmals einfach nur ein paar Definitionen anwenden.*

- *Wenn man im I.S. auf das Problem trifft, dass man die Aussage zwar in kleinere Teilprobleme zerlegen kann, aber die I.V. nicht ausreicht, dann ist eventuell eine Induktion über eine stärkere Aussage vonnöten.*
- *Wenn das immer noch nicht reichen sollte, sollte man eventuell noch einmal einen Schritt zurück machen und überlegen, ob man Induktion über die richtige Formel und richtige Aussage macht. Allerdings sollte man auch nicht vorschnell verzweifeln, da ein I.S. durchaus Zeit kosten und Verständnis für das Problem abverlangen kann.*

Beispiel 4. *Ersetzbarkeitstheorem*
Zur Erläuterung ein (leicht verändertes) Beispiel aus Uwe Schönings „Logik für Informatiker“:
Sei $\varphi \equiv \psi$ und π eine weitere Formel. Zeigen sie: Dann ist $\pi \equiv \pi[\varphi \backslash \psi]$. Dabei ist $\pi[\varphi \backslash \psi]$ die Formel, bei der in π jedes Vorkommen von ψ durch φ ersetzt wird. Formal ist diese durch folgende Rekursionsregel gegeben:

- $\psi[\varphi \backslash \psi] = \varphi$
- $A[\varphi \backslash \psi] = A$, *wenn* $A \neq \psi$
- $(\neg \pi)[\varphi \backslash \psi] = \neg(\pi[\varphi \backslash \psi])$, *wenn* $\neg \pi \neq \psi$
- $(\pi \wedge \xi)[\varphi \backslash \psi] = \pi[\varphi \backslash \psi] \wedge \xi[\varphi \backslash \psi]$, *wenn* $\pi \wedge \xi \neq \psi$

Proof. Zunächst müssen wir die Aufgabenstellung verstehen. Was heisst dieser Satz, den wir beweisen wollen? Wenn wir zwei äquivalente Formeln φ und ψ haben, dann soll, wenn wir in einer dritten Formel π jedes Vorkommen von ψ durch φ ersetzen, die entstehende Formel wieder äquivalent zu π sein.
Den Satz beweisen wir natürlich über Induktion. Dann stellt sich die Frage, über welche der drei Formeln wir induzieren. Da eigentlich nur der Aufbau der Formel π relevant ist, werden wir darüber induzieren. Das sieht man auch daran, dass diese Formel in der Rekursionsvorschrift „zerlegt“ wird. Eine gegebene Rekursion gibt meistens schon einen sinnvollen Induktionsbeweis vor.
Nun stellt sich abschließend noch die Frage, welche Aussage wir in der Induktion beweisen wollen. Dazu übernehmen wir hier einfach die zu zeigende Aussage:

$$z.z. : \text{Sei } \varphi \equiv \psi \text{ Dann gilt: } \forall \pi : \pi \equiv \pi[\varphi \backslash \psi]$$

Wichtig ist es, im folgenden die Korrektheit jedes Umformungsschritts nachvollziehen zu können. Es werden im Grunde drei verschiedene Umformungen angewandt:

1. Anwenden der rekursiven Definition der Ersetzung.
2. Vorausgesetzte Gleichheit oder Äquivalenz zweier Formeln (das ist nicht dasselbe)
3. Anwenden der I.V. (gekennzeichnet)

I.A.: $\pi = A$
Hier (wie auch später) müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

1. $\psi = A$. Dann gilt:
$$\pi[\varphi \backslash \psi] = A[\varphi \backslash A] = \varphi \equiv \psi = A = \pi$$
Also ist $\pi \equiv \pi[\varphi \backslash \psi]$.
2. $\psi \neq A$. Dann gilt
$$\pi[\varphi \backslash \psi] = A[\varphi \backslash \psi] = A \equiv A = \pi$$
Also ist $\pi \equiv \pi[\varphi \backslash \psi]$.

I.S. 1: $\pi \to \neg \pi$
Dann ist unsere I.V.: $\pi \equiv \pi[\varphi \backslash \psi]$
Wieder Fallunterscheidung:

1. $\psi = \neg \pi$. Dann gilt:
$$(\neg \pi)[\varphi \backslash \psi] = \psi[\varphi \backslash \psi] = \varphi \equiv \psi = \neg \pi$$
Hier haben wir die I.V. nicht gebraucht, die Äquivalenz aber trotzdem gezeigt. Die I.V. wird jetzt im zweiten Fall gebraucht:

2. $\psi \neq \neg\pi$. Dann gilt:

$$(\neg\pi)[\varphi\backslash\psi] = \neg(\pi[\varphi\backslash\psi]) \equiv^{I.V.} \neg\pi$$

Also ist in beiden Fällen $\neg\pi \equiv (\neg\pi)[\varphi\backslash\psi]$.

Und der letzte I.S.:
I.S. 2: $\pi, \xi \to \pi \wedge \xi$
Unsere I.V. ist: $\pi \equiv \pi[\varphi\backslash\psi]$ und $\xi \equiv \xi[\varphi\backslash\psi]$
Die selben zwei Fälle:

1. $\pi \wedge \xi = \psi$. Dann gilt:

$$(\pi \wedge \xi)[\varphi\backslash\psi] = \psi[\varphi\backslash\psi] = \varphi \equiv \psi = \pi \wedge \xi$$

2. $\pi \wedge \xi \neq \psi$. Dann gilt:

$$(\pi \wedge \xi)[\varphi\backslash\psi] = \pi[\varphi\backslash\psi] \wedge \xi[\varphi\backslash\psi] \equiv^{I.V.} \pi \wedge \xi[\varphi\backslash\psi] \equiv^{I.V.} \pi \wedge \xi$$

Hier wurde bei den Umformungsschritten mit der I.V. verwendet, dass man bei einer Konjunktion zweier Formeln eine der beiden durch eine äquivalente ersetzen kann und damit wieder eine zur ursprünglichen Konjunktion äquivalente Konjunktion entsteht (kann separat bewiesen werden).

Hier wurde also auch wieder die Äquivalenz $(\pi \wedge \xi)[\varphi\backslash\psi] \equiv \pi \wedge \xi$ gezeigt und somit ist auch dieser Induktionsschritt getan. Damit haben wir unsere Induktion vervollständigt und wir schließen, dass wir unsere Aussage bewiesen haben. $\square$