Mathematische Notation

Lutz Schröder

12. April 2013

1 Mengen

Grundlegende Relation zwischen Mengen ist das Elementverhältnis $\in$. Die Formel $x \in X$ liest sich „x ist Element der Menge y“. Mengen sind allein durch ihre Elemente bestimmt, d.h. zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben. Übliche Relationen und Operationen auf Mengen sind

- *Teilmengenbeziehung/Inklusion:* A ist *Teilmenge* von B, Schreibweise: $A \subseteq B$, wenn aus $x \in A$ stets $x \in B$ folgt, d.h. B mindestens alle Elemente von A enthält. A heißt *echte Teilmenge* von B, wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

- *Vereinigung:* $A \cup B$ ist die Menge mit $x \in A \cup B$ genau dann, wenn $x \in A$ oder $x \in B$.

- *Durchschnitt:* $A \cap B$ ist die Menge mit $x \in A \cap B$ genau dann, wenn $x \in A$ und $x \in B$.

- *Mengendifferenz:* $A \setminus B$ ist die Menge mit $x \in A \setminus B$ genau dann, wenn $x \in A$, aber nicht $x \in B$. Wenn $B \subseteq A$, so schreibt man auch $A - B$ statt $A \setminus B$.

- *Mengenkomprehension:* Wenn A eine Menge ist und $P(x)$ eine Aussage über x, so ist $\{x \in A \mid P(x)\}$ eine Teilmenge von A, die Menge derjenigen Elemente x von A, die $P(x)$ erfüllen.

- *Große Vereinigung/Großer Durchschnitt:* Wenn $\mathfrak{A}$ eine Menge von Mengen ist, dann schreibt man

  $$\bigcup \mathfrak{A} = \{x \mid x \in A \text{ für ein } A \in \mathfrak{A}\}. \bigcap \mathfrak{A} \quad = \{x \mid x \in A \text{ für alle } A \in \mathfrak{A}\}.$$

- *Kreuzprodukt/kartesisches Produkt:* Wenn A und B Mengen sind, dann schreibt man
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$
- *Potenzmenge:* Für eine Menge A ist die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(A)$ die Menge aller Teilmengen von A:
$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Ein häufig verwendetes Verfahren zum Beweis der Gleichheit zweier Mengen A, B ist, beide Inklusionen zwischen A und B zu zeigen, d.h. $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

2 Relationen und Ordnungen

Eine (zweistellige) *Relation* zwischen Mengen A und B ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$. Für $x \in A$, $y \in B$ schreibt man üblicherweise xRy als Abkürzung für $(x, y) \in R$. Eine Relation $R \subseteq A \times A$ ist

- *reflexiv*, wenn xRx für alle $x \in A$;
- *symmetrisch*, wenn für alle $x, y \in A$ aus xRy yRx folgt;
- *transitiv*, wenn für alle $x, y, z \in A$ aus xRy und yRz xRx folgt;
- *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in A$ aus xRy und yRx bereits $x = y$ folgt.

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt *Äquivalenzrelation* (auf A), wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, und *(partielle) Ordnung* (auf A), wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Beispiel: Auf den ganzen Zahlen ist die durch nRm genau dann, wenn $n - m$ durch 3 teilbar ist, definierte Relation eine Äquivalenzrelation; auf den natürlichen Zahlen ist die Relation „teilt“ eine Ordnung (man überlege sich, warum das auf den ganzen Zahlen nicht stimmt). Eine Ordnung R auf A heißt *total* oder *linear*, wenn für alle $x, y \in A$ xRy oder yRx gilt. Nicht alle Ordnungen sind total, z.B. ist $\subseteq$ eine Ordnung auf $\mathcal{P}(A)$, und wenn z.B. $x, y \in A$, $x \neq y$, so gilt weder $\{x\} \subseteq \{y\}$ noch $\{y\} \subseteq \{x\}$. Auch die Teilbarkeitsordnung ist nicht total.

Wenn $\leq$ eine Ordnung auf A ist, so heißt ein Element $x \in A$ *größtes* Element von A, wenn $y \leq x$ für alle $y \in A$. Im Gegensatz hierzu heißt x *maximal*, wenn für alle $y \in A$ aus $x \leq y$ bereits $x = y$ folgt. Eine Menge kann viele maximale Elemente haben. Z.B. sind in der Menge aller echten Teilmengen von A, geordnet wieder durch $\subseteq$, alle Mengen der Form $A - \{x\}$ für $x \in A$ maximal.

3 Abbildungen

Eine Relation $f \subseteq A \times B$ heißt

- *linkstotal*, wenn für jedes $x \in A$ ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$, und
- *rechtseindeutig*, wenn für $x, y, y' \in A$ aus $(x, y), (x, y') \in f$ stets $y = y'$ folgt.

Eine linkstotale und rechtseindeutige Relation heißt *Abbildung* oder *Funktion* von A nach B, Notation: $f : A \to B$. Die beiden Eigenschaften rechtfertigen die Schreibweise $f(x)$ für das eindeutig bestimmte y mit $(x, y) \in f$. Für $C \subseteq A$ bezeichnet dann $f[C]$ das *Bild* von C unter f, d.h.

$$f[C] = \{y \in B \mid f(x) = y \text{ für ein } x \in C\},$$

und für $D \subseteq B$ bezeichnet $f^{-1}[D]$ das *Urbild* von D, d.h.

$$f^{-1}[D] = \{x \in A \mid f(x) \in D\}.$$

Allgemein hat man für Mengenkomprehensionen der Form $\{y \mid f(x) = y \text{ für ein } x \text{ mit } P(x)\}$ die Kurzform $\{f(x) \mid P(x)\}$, z.B. in dieser Schreibweise

$$f[C] = \{f(x) \mid x \in C\}.$$

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt *injektiv*, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ bereits $x_1 = x_2$ folgt. Ferner ist f *surjektiv*, wenn für jedes $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $f(x) = y$. Z.B. ist die durch $f(n) = 2n$ definierte Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv, aber nicht surjektiv; die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - x^2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv; und die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = x + 1$ ist bijektiv. Die *identische Abbildung* $id_A : A \to A$ ist definiert durch $id_A(x) = x$. Gegeben Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist die *Komposition* $g \circ f : A \to C$ definiert durch $g \circ f(x) = g(f(x))$. Wenn $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung ist, dann existiert eine *inverse Abbildung* $g : B \to A$ mit $g \circ f = id_A$, $f \circ g = id_B$.