# GLoIn-Übungsblatt 12

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2025/26) vom 14. Januar 2026
Tutorien vom 19.01. bis 23.01.; Abgabe bis Dienstag, **27. Januar 2026** (23:59 Uhr)

## Präsenzaufgabe P12.1 MIU

Das Buch *Gödel, Escher, Bach* (kurz: *GEB*; 1979; mit dem Pulitzer-Preis ausgezeichnet) von Douglas R. Hofstadter erkundet die Grenzen mathematischer Beweisbarkeit und zieht Parallelen zwischen den Werken von

- Kurt Gödel (Logiker, 1906-1978)
- Maurits Cornelis Escher (Grafiker, 1898-1972)
- Johann Sebastian Bach (Komponist, 1685-1750)

Der Slogan: selbst komplexe mathematische Beweise sind einfach nur Folgen von kleinschrittigen Anwendungen simpler logischer Regeln (wie ($\wedge$I), ($\wedge$E1), etc). Um den syntaktischen Charakter zu verdeutlichen, wird in GEB (Kapitel 1) mit einem fiktiven MIU-System gespielt, das Zeichenketten aus M, I und U nach den folgenden Regeln manipuliert:

(1) MI ist herleitbar (Axiom).

(2) $x\mathsf{I} \rightsquigarrow x\mathsf{IU}$ (Endet eine Zeichenkette auf I, darf man ein U anhängen.)

(3) $\mathsf{M}x \rightsquigarrow \mathsf{M}xx$ (Die komplette Zeichenkette nach M darf man verdoppeln.)

(4) $x\mathsf{III}y \rightsquigarrow x\mathsf{U}y$ (Jedes III darf durch U ersetzt werden.)

(5) $x\mathsf{UU}y \rightsquigarrow xy$ (Jedes UU darf gelöscht werden.)

Lassen sich die folgenden Zeichenketten herleiten? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(a) MUI

(b) MUII

(c) MU

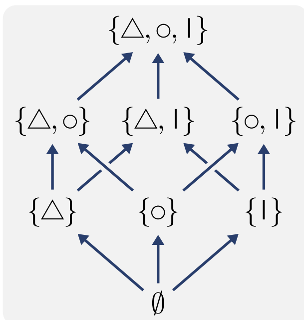
## Aufgabe A12.1 Prädikatenlogische Folgerung (4 Punkte)

Sind über der Signatur $\Sigma = \{\mathsf{R}/2, \mathsf{P}/1\}$ folgende logischen Folgerungen $\phi \models \psi$ wahr? Falls ja, geben Sie einen Beweis mittels natürlichen Schließens an. Falls nein, geben Sie ein Modell (mit max. 3 Elementen im Träger) an, in dem $\phi$ erfüllt wird aber nicht $\psi$.

(a) $\exists x.(\mathsf{P}(x) \to \forall y.\mathsf{R}(y,y)) \models (\exists x.\mathsf{P}(x)) \to \forall y.\mathsf{R}(y,y)$ *2 Punkte*

(b) $(\forall x, y.\ \mathsf{R}(x,y) \vee \mathsf{R}(y,x)) \models \exists x, y.\ \mathsf{R}(x,y) \wedge \mathsf{R}(y,x)$ *2 Punkte*

## Aufgabe A12.2 Ordnungen und Schranken (5 Punkte)




In der Signatur $\Sigma = \{\mathsf{R}/2, u/2, c/1, a/0, b/0\}$ betrachten wir R als Ordnungsrelation, $c$ als Komplement und $u$ als obere Schranke. Zur Veranschaulichung dient das Modell rechts auf dem Träger $M := \mathcal{P}(\{\triangle, \circ, |\})$. Hier können wir R als „Teilmenge von" verstehen, angedeutet durch Kanten (zwecks Übersichtlichkeit wurden Kanten weggelassen, die sich aus Reflexivität und Transitivität ergeben), $c$ als Komplement und $u$ als Vereinigungsmenge. Der Schnitt zweier Mengen ist ein Beispiel einer *unteren Schranke*.

Konstruieren Sie aus Komplement und oberen Schranken eine untere Schranken $z$ für $a$ und $b$, indem Sie per Resolution zeigen, dass folgende Klauselmenge unerfüllbar ist: *4 Punkte*

$$\{\ \overbrace{\{\mathsf{R}(s,u(s,t))\},\ \{\mathsf{R}(r,u(q,r))\}}^{\text{„}u\text{ liefert obere Schranken“}},\ \overbrace{\{\neg\mathsf{R}(c(x),y),\mathsf{R}(c(y),x)\}}^{\text{„}c\text{ liefert Komplemente“}},\ \overbrace{\{\neg\mathsf{R}(z,a),\neg\mathsf{R}(z,b)\}}^{\text{„Gesucht: untere Schranke }z\text{“}}\ \}$$

Wie lautet die untere Schranke $z$ von $a$ und $b$? (Gesucht ist ein Term ohne freie Variablen) *1 Punkt*

**Tipp:** Überlegen Sie sich zuerst ein informelles Argument, inspiriert von De Morgan!

## Aufgabe A12.3 Skolemisierung (4 Punkte)

Zeigen Sie die logische Konsequenz

$$\forall x,z.\exists y.\mathsf{R}(x,z) \land \mathsf{R}(y,z) \quad \models \quad \forall v.\exists w.\mathsf{R}(v,w)$$

über der Signatur $\Sigma = \{\mathsf{R}/2\}$ mittels folgender Schritte:

(a) Geben Sie zur Formel $(\forall x,z.\exists y.\mathsf{R}(x,z) \land \mathsf{R}(y,z)) \land \neg(\forall v.\exists w.\mathsf{R}(v,w))$ eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel $\phi$ in Skolemform an (gemäß Satz 7.6 und über der erweiterten Signatur $\Sigma = \{\mathsf{R}/2, u/2, a/0\}$) *2 Punkte*

(b) Zeigen Sie per Resolution, dass $\phi$ unerfüllbar ist. *2 Punkte*

## Aufgabe A12.4 Modelle von Skolem-Formeln (5 Punkte)

(a) Für eine Signatur $\Sigma$ aus ausschließlich Prädikatensymbolen sei $\phi$ eine geschlossene Formel in Skolemform. Beweisen Sie: wenn $\mathfrak{M} \models \phi$, so gibt es für jede nichtleere Teilmenge $N \subseteq M$ des Trägers ein Modell $\mathfrak{N}$ mit Träger $N$, so dass $\mathfrak{N} \models \phi$. *4 Punkte*

**Vereinfachung:** Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass wenn zwei Modelle (mit Belegungen) $\mathfrak{M}_1, \eta_1$ und $\mathfrak{M}_2, \eta_2$ dieselben atomaren Formeln erfüllen, dann erfüllen sie auch diesselben quantorfreien Formeln.

(b) Sei $\Sigma = \{f/1\}$, wobei $f$ ein Funktionssymbol ist. Nennen Sie eine erfüllbare Formel $\phi$ in Skolemform („=“ ist erlaubt), die nur Modelle mit mindestens 3 Elementen im Träger hat. *1 Punkt*