GLoIn-Übungsblatt 10

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2025/26) vom 17. Dezember 2025
Tutorien vom 12.01. bis 16.01.; Abgabe bis Dienstag, **21. Januar 2025** (23:59 Uhr)

Präsenzaufgabe P10.1 Unifikation

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen in der Signatur der Peano-Arithmetik ($\Sigma = \{+/2, s/1, 0/0\}$; vgl. A7.4) unifizierbar sind, und ggf. einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen.

(a) $(x + 0) + (y + 0) \doteq x + s(x)$;

(b) $x + s(y) \doteq 0 + s(s(x))$.

Was passiert, wenn man den Occurs-Check aus dem Unifikationsalgorithmus weglässt?

Aufgabe A10.1 Unifikation (9 Punkte)

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen in der Signatur $\Sigma = \{f/1, g/2, +/2, a/0\}$ unifizierbar sind, und ggf. einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen.

3 Punkte (a) $g(f(x), f(a)) \doteq g(f(y), f(y))$

3 Punkte (b) $g(f(f(x)), y) \doteq g(y, f(a))$

(c) $(x + x) + x \doteq y + (y + y)$ *3 Punkte*

Aufgabe A10.2 Unifikation & Natürliches Schließen (5 Punkte)

In etlichen Programmiersprachen treten während des Kompilierens Unifikationsprobleme auf (u.a. während `apply` in Rocq). Sei $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, f/1, g/3\}$, wobei P ein Prädikatensymbol ist und f, g Funktionssymbole. Beweisen Sie $\forall x.\, \forall y.\, \mathsf{P}(g(x, f(x), y)) \vdash \exists z.\, \exists w.\, \mathsf{P}(g(f(z), w, f(w)))$ indem Sie:

(a) einen Unifikator für $g(x, f(x), y) \doteq g(f(z), w, f(w))$ (wie oben) berechnen *3 Punkte*

(b) und anschließend mit diesem Wissen einen Beweis mittels natürlichen Schließens führen. *2 Punkte*

Aufgabe A10.3 Trinkerparadoxon (4 Punkte)

Das sogenannte *Trinkerparadoxon* behauptet von jeder Kneipe:
„Es gibt jemanden, so dass, wenn er trinkt, alle trinken".
Beweisen Sie das Trinkerparadoxon in Rocq, indem Sie `trinker.v` ergänzen.
Hinweis: Sie dürfen bei dieser Aufgabe *ausnahmsweise* die Taktik `apply classic.` verwenden, die ein Ziel der Form $\phi \vee \neg\phi$ löst!

Aufgabe A10.4 (3 Punkte)

Ein Barbier ist jemand, der genau die rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Zeigen Sie, dass die Existenz eines Barbiers inkonsistent ist, indem Sie über der Signatur $\Sigma = \{\mathsf{R}/2\}$ zeigen:

$$(\exists b.\ \forall x.\ \mathsf{R}(b, x) \leftrightarrow \neg \mathsf{R}(x, x)) \ \vdash\ \bot$$

Hier verstehen wir $\phi \leftrightarrow \psi$ als Notation für $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$.

Bonusaufgabe A10.5 Naive Mengenlehre (1 Bonuspunkt)

Mengenlehre trifft Aussagen über derselben Signatur wie in A10.4, wobei wir nun $R(y,x)$ als „y enthält x“ lesen (üblicherweise „$x \in y$“ geschrieben). Über dieser Signatur hat naive Mengenlehre die Axiome

$$\Phi := \{\ \exists z.\ \forall x.\ R(z,x) \leftrightarrow \phi \quad \mid \phi \in \mathscr{F}_{\mathsf{FO}}(\Sigma) \text{ ist eine FO-Formel mit } z \notin \mathsf{FV}(\phi)\} \ \subseteq\ \mathscr{F}_{\mathsf{FO}}(\Sigma)$$

In Worten: zu jeder Eigenschaft ϕ existiert eine Menge z, die als Elemente genau solche x enthält, die ϕ erfüllen. Nutzen Sie das Ergebnis aus A10.4, um zu zeigen, dass naive Mengenleere inkonsistent ist, also $\Phi \vdash \bot$.