

## Präsenzaufgabe P9.1 Stein der Auferstehung

In *Harry Potter und die Heiligtümer des Todes* (S. 420) werden Nichtexistenz-Beweise diskutiert:

„Wie kann ich denn *jemals* beweisen, dass [der Stein der Auferstehung] nicht existiert?  
Erwarten Sie, dass ich sämtliche Kieselsteine der Welt einsammle und sie prüfe?“

Verifizieren Sie dies, indem Sie die Äquivalenz von  $\forall x. S(x) \rightarrow \neg A(x)$  und  $\neg \exists x. S(x) \wedge A(x)$  mittels natürlichen Schließens und in Rocq zeigen (Verwenden Sie [stein.v](#) als Vorlage).

## Präsenzaufgabe P9.2 Unterscheidbarkeit per FOL

Geben Sie für jedes der folgenden Paare von Modellen  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  für  $\Sigma = \{P/1, R/2\}$  eine Formel  $\phi$  an (mit  $FV(\phi) = \emptyset$ ), die in  $\mathfrak{M}$  erfüllt wird ( $\mathfrak{M} \models \phi$ ) aber nicht in  $\mathfrak{N}$  ( $\mathfrak{N} \not\models \phi$ ):



## Präsenzaufgabe P9.3 Erfüllbarkeit

Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln  $\phi$  für  $\Sigma = \{P/1, R/2\}$  erfüllbar sind, indem Sie graphisch ein Modell  $\mathfrak{M}$  angeben, so dass  $\mathfrak{M} \models \phi$ .

- (a)  $(\forall x. P(x) \rightarrow \exists y. \neg(x = y) \wedge R(x, y)) \wedge \forall x. R(x, x) \vee P(x)$
- (b)  $(\exists x. P(x)) \wedge (\exists x. \neg P(x)) \wedge \forall x, y. R(x, y)$
- (c)  $(\exists x, y. R(x, y)) \wedge \forall x, y. R(x, y) \leftrightarrow (P(x) \leftrightarrow \neg P(y))$

## Aufgabe A9.1 Unterscheidbarkeit per FOL (4 Punkte)

Geben Sie für jedes der folgenden Paare von Modellen  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  für  $\Sigma = \{P/1, R/2\}$  eine Formel  $\phi$  an (mit  $FV(\phi) = \emptyset$ ), die in  $\mathfrak{M}$  erfüllt ist ( $\mathfrak{M} \models \phi$ ) aber in  $\mathfrak{N}$  nicht erfüllt ist ( $\mathfrak{N} \not\models \phi$ ):



## Aufgabe A9.2 Erfüllbarkeit (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln  $\phi$  für  $\Sigma = \{P/1, R/2\}$  erfüllbar sind, indem Sie ein Modell  $\mathfrak{M}$  angeben, so dass  $\mathfrak{M} \models \phi$ . Um das jeweilige Modell  $\mathfrak{M}$  zu definieren, genügt es, die graphische Darstellung anzugeben (wie in vorigen Aufgaben).

- (a)  $(\forall x. \exists y. R(x, y)) \wedge \neg(\exists y. \forall x. R(x, y))$  2 Punkte
- (b)  $\forall y. \neg R(y, y) \leftrightarrow \exists x. R(x, y)$  2 Punkte
- (c)  $\forall k. \exists m, v. R(k, m) \wedge R(k, v) \wedge \neg(m = v)$  2 Punkte

### Aufgabe A9.3 Es gibt genau ein ...

(4 Punkte)

Viele Existenzaussagen in der Mathematik betreffen nicht nur gewöhnliche Existenz, sondern *eindeutige* Existenz (z. B. existiert für jede natürliche Zahl eine *eindeutige* Primfaktorzerlegung). Die übliche Notation hierfür ist  $\exists!x. \phi(x)$ : „Es gibt *genau ein*  $x$ , das  $\phi(x)$  erfüllt“. Grundsätzlich sind zwei Kodierungen von  $\exists!$  in Prädikatenlogik denkbar:

- (i)  $\exists x. (\phi(x) \wedge \forall y. \phi(y) \rightarrow x = y)$   
 („Es gibt eines mit der Eigenschaft, dass jedes weitere gleich diesem sein muss“)
- (ii)  $(\exists x. \phi(x)) \wedge (\forall x_1, x_2. \phi(x_1) \wedge \phi(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$   
 („Zum einen gibt es mindestens eines, und zum anderen gibt es höchstens eins“)

Rocq definiert `exists!` mittels (i). Zeigen Sie in Rocq, dass die beiden Definitionen äquivalent sind, indem Sie `exists_uniq.v` vervollständigen.

**Hinweis:** Rocq verwendet in der Definition von `exists!` eine Hilfsdefinition namens `unique`. Falls `unique` im Kontext erscheint, können Sie dies mittels `unfold unique in *` auffalten, um die prädikatenlogische Formel (wie in (i)) zu sehen.

### Aufgabe A9.4 Beschränkte Quantoren

(4 Punkte)

„Nicht alle  $P$  sind  $Q$ “  $\equiv$  „Es gibt ein  $P$ , das nicht  $Q$  ist“

Verifizieren Sie das Gesetz von De Morgan für beschränkte Quantoren ( $\Sigma = \{P/1, Q/1\}$ ):

- (a) Zeigen Sie mittels natürlichen Schließens:  $\exists x. P(x) \wedge \neg Q(x) \vdash \neg \forall x. P(x) \rightarrow Q(x)$  2 Punkte
- (b) Zeigen Sie in Rocq:  $\neg \forall x. P(x) \rightarrow Q(x) \vdash \exists x. P(x) \wedge \neg Q(x)$  2 Punkte  
 (Verwenden Sie `de_morgan_quantor.v` als Vorlage)