

Präsenzaufgabe P9.1 Stein der Auferstehung

In *Harry Potter und die Heiligtümer des Todes* (S. 420) werden Nichtexistenz-Beweise diskutiert:

„Wie kann ich denn *jemals* beweisen, dass [der Stein der Auferstehung] nicht existiert?
 Erwarten Sie, dass ich sämtliche Kieselsteine der Welt einsammle und sie prüfe?“

Verifizieren Sie dies, indem Sie die Äquivalenz von $\forall x. S(x) \rightarrow \neg A(x)$ und $\neg \exists x. S(x) \wedge A(x)$ mittels natürlichen Schließens und in Rocq zeigen (Verwenden Sie [stein.vz](#) als Vorlage).

Präsenzaufgabe P9.2 Unterscheidbarkeit per FOL

Geben Sie für jedes der folgenden Paare von Modellen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ für $\Sigma = \{P/1, R/2\}$ eine Formel ϕ an (mit $\text{FV}(\phi) = \emptyset$), die in \mathfrak{M} erfüllt wird ($\mathfrak{M} \models \phi$) aber nicht in \mathfrak{N} ($\mathfrak{N} \not\models \phi$):



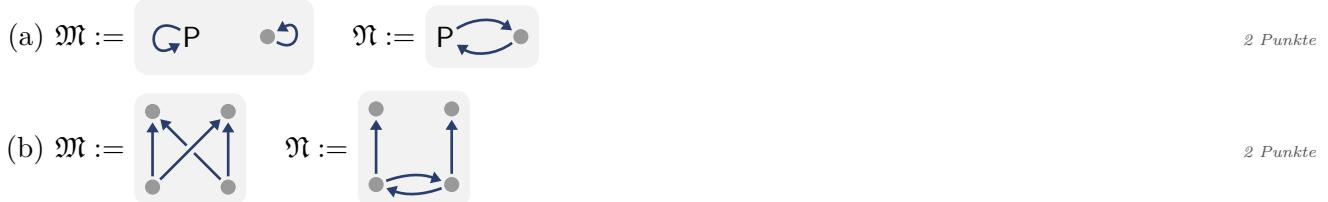
Präsenzaufgabe P9.3 Erfüllbarkeit

Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln ϕ für $\Sigma = \{P/1, R/2\}$ erfüllbar sind, indem Sie graphisch ein Modell \mathfrak{M} angeben, so dass $\mathfrak{M} \models \phi$.

- (a) $(\forall x. P(x) \rightarrow \exists y. \neg(x = y) \wedge R(x, y)) \wedge \forall x. R(x, x) \vee P(x)$
- (b) $(\exists x. P(x)) \wedge (\exists x. \neg P(x)) \wedge \forall x, y. R(x, y)$
- (c) $(\exists x, y. R(x, y)) \wedge \forall x, y. R(x, y) \leftrightarrow (P(x) \leftrightarrow \neg P(y))$

Aufgabe A9.1 Unterscheidbarkeit per FOL (4 Punkte)

Geben Sie für jedes der folgenden Paare von Modellen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ für $\Sigma = \{P/1, R/2\}$ eine Formel ϕ an (mit $\text{FV}(\phi) = \emptyset$), die in \mathfrak{M} erfüllt ist ($\mathfrak{M} \models \phi$) aber in \mathfrak{N} nicht erfüllt ist ($\mathfrak{N} \not\models \phi$):



Aufgabe A9.2 Erfüllbarkeit (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln ϕ für $\Sigma = \{P/1, R/2\}$ erfüllbar sind, indem Sie ein Modell \mathfrak{M} angeben, so dass $\mathfrak{M} \models \phi$. Um das jeweilige Modell \mathfrak{M} zu definieren, genügt es, die graphische Darstellung anzugeben (wie in vorigen Aufgaben).

- (a) $(\forall x. \exists y. R(x, y)) \wedge \neg(\exists y. \forall x. R(x, y))$ 2 Punkte
- (b) $\forall y. \neg R(y, y) \leftrightarrow \exists x. R(x, y)$ 2 Punkte
- (c) $\forall k. \exists m, v. R(k, m) \wedge R(k, v) \wedge \neg(m = v)$ 2 Punkte

Aufgabe A9.3 Es gibt genau ein ... (4 Punkte)

Viele Existenzaussagen in der Mathematik betreffen nicht nur gewöhnliche Existenz, sondern *eindeutige* Existenz (z. B. existiert für jede natürliche Zahl eine *eindeutige* Primfaktorzerlegung). Die übliche Notation hierfür ist $\exists!x. \phi(x)$: „Es gibt *genau ein* x , das $\phi(x)$ erfüllt“. Grundsätzlich sind zwei Kodierungen von $\exists!$ in Prädikatenlogik denkbar:

- (i) $\exists x. (\phi(x) \wedge \forall y. \phi(y) \rightarrow x = y)$
„Es gibt eines mit der Eigenschaft, dass jedes weitere gleich diesem sein muss“
- (ii) $(\exists x. \phi(x)) \wedge (\forall x_1, x_2. \phi(x_1) \wedge \phi(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$
„Zum einen gibt es mindestens eines, und zum anderen gibt es höchstens eins“)

Rocq definiert `exists!` mittels (i). Zeigen Sie in Rocq, dass die beiden Definitionen äquivalent sind, indem Sie `exists_uniq.v` vervollständigen.

Hinweis: Rocq verwendet in der Definition von `exists!` eine Hilfsdefinition namens `unique`. Falls `unique` im Kontext erscheint, können Sie dies mittels `unfold unique in *` auffalten, um die prädikatenlogische Formel (wie in (i)) zu sehen.

Aufgabe A9.4 Beschränkte Quantoren (4 Punkte)

„Nicht alle P sind Q “ \equiv „Es gibt ein P , das nicht Q ist“

Verifizieren Sie das Gesetz von De Morgan für beschränkte Quantoren ($\Sigma = \{P/1, Q/1\}$):

(a) Zeigen Sie mittels natürlichen Schließens: $\exists x. P(x) \wedge \neg Q(x) \vdash \neg \forall x. P(x) \rightarrow Q(x)$

2 Punkte

(b) Zeigen Sie in Rocq: $\neg \forall x. P(x) \rightarrow Q(x) \vdash \exists x. P(x) \wedge \neg Q(x)$

2 Punkte

(Verwenden Sie `de_morgan_quantor.v` als Vorlage)