

GLoIn-Übungsblatt 8

TCS

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2025/26) vom 3. Dezember 2025
Tutorien vom 08.12. bis 12.12.; Abgabe bis Dienstag, **16. Dezember 2025** (23:59 Uhr)

Präsenzaufgabe P8.1 Substitution

Werten Sie (über der Signatur $\Sigma = \{R/2, Q/1, f/2, c/0\}$) folgende Substitution aus:

$$((\forall x. R(x, y)) \wedge Q(y)) [c/x, f(x, y)/y, c/z]$$

Präsenzaufgabe P8.2 Natürliches Schließen

Zeigen Sie mittels natürlichen Schließens (über $\Sigma = \{R/2, P/1, Q/1, f/1, g/2\}$):

- (a) $\exists y. R(x, f(y)) \vdash \exists z. R(x, z)$
- (b) $\forall x. P(x) \wedge Q(x) \vdash (\forall x. P(x)) \wedge \forall y. Q(y)$
- (c) $\vdash \forall x. \exists y. (f(x) = y).$

Aufgabe A8.1 Substitution (3 Punkte)

Berechnen Sie die folgende Substitution (über der Signatur $\Sigma = \{P/1, S/2, f/2, g/1\}$):

$$(\forall x. P(z) \wedge \forall y. S(x, y)) [f(x, y)/x, g(y)/y, g(x)/z].$$

Geben Sie explizit die relevanten Frischheitsbedingungen an.

Aufgabe A8.2 Natürliches Schließen (11 Punkte)

Zeigen Sie mittels natürlichen Schließens über der Signatur $\Sigma = \{R/2, P/1, Q/1\}$:

- (a) $\forall x. R(x, x) \vdash \forall y. \exists z. R(z, y)$ 2 Punkte
- (b) $\forall u, v. R(u, v) \rightarrow P(u) \vdash \forall x. (\exists y. R(x, y)) \rightarrow P(x)$ 3 Punkte
- (c) $\{\forall v. R(u, v) \rightarrow Q(v), \exists w. R(u, w) \wedge P(w)\} \vdash \exists x. R(u, x) \wedge P(x) \wedge Q(x)$ 3 Punkte

Aufgabe A8.3 Fording (4 Punkte)

„Any customer can have a car painted any color that they want so long as it is black.“

– Henry Ford

Beweisen Sie das Prinzip des *Fordings*, indem Sie folgendes mittels natürlichen Schließens (für ein einstelliges Prädikat P und eine Konstante b) herleiten. Hierbei betrachten wir $\alpha \leftrightarrow \beta$ als Notation für $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

$$\vdash P(b) \leftrightarrow \forall c. (c = b) \rightarrow P(c)$$