

Präsenzaufgabe P7.1 Stammbaum

Für $\Sigma = \{K/2\}$ lesen wir $K(x, y)$ als „ x ist Kind von y “. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik:

- (a) z hat ein Enkelkind. (c) Alle Eltern haben Enkel. (e) Jede:r hat genau zwei Elternteile.
(b) Es gibt nur Einzelkinder. (d) Alle sind Geschwister.

Hinweis: Wir verstehen *Geschwister* großzügig und beziehen auch Halbgeschwister mit ein.

Aufgabe A7.1 De Morgan in Rocq (4 Punkte)

Formalisieren und beweisen Sie die folgenden Aussagen in Rocq:

- (a) $\vdash \neg A \wedge \neg B \leftrightarrow \neg(A \vee B)$ 2 Punkte
(b) $\vdash \neg A \vee \neg B \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$ 2 Punkte

Aufgabe A7.2 Logische Folgerung durch Resolution (6 Punkte)

Beweisen Sie folgende logische Folgerung mittels Resolution. Es genügt, die (korrekte) CNF/Klauselmenge direkt anzugeben und darauf den Resolutionsalgorithmus anzuwenden:

- 3 Punkte (a) $\{A, B, A \wedge B \rightarrow C \wedge D\} \models C \wedge D$. (b) $\{A, A \vee B \rightarrow C \vee D\} \models C \vee D$. 3 Punkte

Aufgabe A7.3 Stammbaum (4 Punkte)

Formalisieren Sie folgende Aussagen in Prädikatenlogik über der Signatur $\Sigma = \{K/2\}$:

- 2 Punkte (a) x und y sind (nur) Halbgeschwister (b) Alle Eltern sind (selbst) Kinder 2 Punkte

Aufgabe A7.4 Peano-Arithmetik (7 Punkte)

Peano-Arithmetik ist eine Formalisierung der natürlichen Zahlen in Logik erster Stufe (aus dem Jahr 1889!) über den Funktionssymbolen $+$ (Addition), \times (Multiplikation), s (Nachfolger) und 0 (Null). Die unterliegende Signatur ist also $\Sigma = \{+/2, \times/2, s/1, 0/0\}$. Zusätzliche Symbole dürfen nur in Form von Abkürzungen verwendet werden, z. B. $1 := s(0)$ und $2 := s(s(0))$.

Formalisieren Sie folgende Aussagen in Peano-Arithmetik:

- (a) n ist Primzahl. 1 Punkt
(b) Alle Quadratzahlen sind durch 3 teilbar. 2 Punkte
(c) $n < m$; verwenden Sie hier weder Negation noch Implikation!
(Lediglich $\forall, \exists, \vee, \wedge, =$ und Terme sind erlaubt) 2 Punkte
(d) Die Abbildung $n \mapsto n + 2$ (auf natürlichen Zahlen) ist injektiv. 2 Punkte

Hinweis: Sie dürfen $+$ und \times in der üblichen Infix-Notation verwenden, also $n + m$ statt $+(n, m)$. Es sind nur die Formalisierungen gefragt, nicht etwa Beweise (mindestens eine Aussage ist ja auch klarerweise nicht gültig).

Tipp: Zerlegen Sie die Aufgabe in Teilprobleme. Wann ist n eine Quadratzahl?