

Hinweise und Definitionen

Zu jeder Menge X gibt es eine *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X)$, die genau aus den Teilmengen von X besteht, formal:

$$\forall S. \quad S \in \mathcal{P}(X) \iff S \subseteq X$$

Grundsätzlich gilt, dass zwei Mengen R, T genau dann gleich sind ($R = T$), wenn sie die gleichen Elemente haben, also:

$$R = T \iff (\forall r \in R. r \in T \quad \text{und} \quad \forall t \in T. t \in R)$$

Daraus ergibt sich:

- Zwei Funktionen $f, g: X \rightarrow Y$ sind genau dann gleich ($f = g$), wenn für alle $x \in X$ die Aussage $f(x) = g(x)$ gilt.
- Zwei Teilmengen $S, S' \subseteq X$ sind genau dann gleich, wenn für alle $x \in X$ die Aussage $x \in S \Leftrightarrow x \in S'$ gilt.

Präsenzaufgabe P4.1

Im Wahrheitslemma wird eine Formelmenge in eine Wahrheitsbelegung umgewandelt. Grundsätzlich stehen Teilmengen in einem starken Zusammenhang zu Funktionen nach 2, wie wir hier sehen: Wir definieren eine Funktion W , die jeder Menge von Atomen $S \subseteq \mathcal{A}$ eine Wahrheitsbelegung zuordnet:

$$W: \mathcal{P}(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow 2) \quad W(S) = A \mapsto \begin{cases} \top & \text{falls } A \in S \\ \perp & \text{falls } A \notin S \end{cases}$$

Beweisen Sie:

- (a) W ist injektiv.
- (b) W ist surjektiv.

Präsenzaufgabe P4.2

Gegeben sei die Funktion $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definiert durch

$$s(0) = 0 \quad s(n+1) = s(n) + n + 1.$$

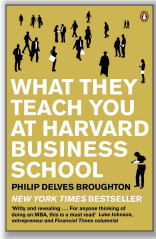
Beweisen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $s(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ gilt.

Aufgabe A4.1 Intuitionismus

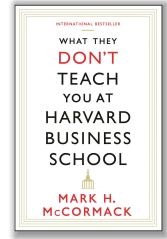
(6 Punkte)

Eine Herleitung im Kalkül des natürlichen Schließens heißt *intuitionistisch* (oder auch *konstruktiv*), wenn in ihr nicht die Regel $(\neg\neg E)$ verwendet wird. Wir schreiben $\phi \vdash_{\text{int}} \psi$, wenn sich ψ aus ϕ intuitionistisch herleiten lässt. Doch warum sollte man $(\neg\neg E)$ vermeiden wollen? Weil Beweissistenten wie Rocq/Coq intern mit dem Curry-Howard-Isomorphismus arbeiten, der besagt:

Intuitionistische Beweise *sind* Programme!



Details wie die dazu gehörige Programmiersprache lernen Sie in *Theorie der Programmierung* kennen. Für die aktuelle Aufgabe genügt es, auf $(\neg\neg E)$ zu verzichten. Damit lässt sich beispielsweise $A \vee \neg A$ nicht mehr herleiten: Der intuitive Grund hierfür ist, dass man für ein allgemeines Atom A nicht grundsätzlich sagen kann, ob A oder ob $\neg A$ wahr ist. (In welchem der beiden abgebildeten Büchern würden Sie *Logik* nachschlagen?)



(a) Zeigen Sie $\neg A \wedge \neg B \vdash_{\text{int}} \neg(A \vee B)$

2 Punkte

(b) Zeigen Sie $\vdash_{\text{int}} \neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$

2 Punkte

(c) Zeigen Sie $\neg\neg A \wedge \neg\neg B \vdash_{\text{int}} \neg\neg(A \wedge B)$

2 Punkte

Aufgabe A4.2

(5 Punkte)

Wir definieren eine Funktion L , die jeder Wahrheitsbelegung κ die Menge der Formeln zuordnet, die von κ erfüllt werden:

$$L: (\mathcal{A} \rightarrow 2) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}) \quad L(\kappa) = \{\phi \in \mathcal{F} \mid \kappa \models \phi\}$$

Beweisen Sie für alle Mengen $\mathcal{A}$:

(a) L ist injektiv.

3 Punkte

(b) L ist nicht surjektiv.

2 Punkte

Hinweis: Beide Teilaufgaben müssen für beliebiges $\mathcal{A}$ korrekt sein, also unabhängig davon ob $\mathcal{A}$ endlich, unendlich, etc. ist. Nutzen Sie die Hinweise zur Gleichheit von Funktionen und Mengen (siehe Beginn dieses Übungsblatts).

Hinweis: Die Definition von injektiv bzw. surjektiv sind auf den vorherigen Übungsblättern sowie im Anhang A des Skripts zu finden.

Aufgabe A4.3

(4 Punkte)

Beweisen Sie, dass für jede konsistente Menge $\Phi \subseteq \mathcal{F}$ gilt:

Φ ist genau dann maximal konsistent, wenn für alle Formeln ψ gilt: $\psi \in \Phi$ oder $\neg\psi \in \Phi$.

Tipps:

A4.1



A4.3

