Probeklausur 1. Januar 2025
Lehrstuhl Informatik 8 (Theoretische Informatik)
Universität Erlangen-Nürnberg

Probeklausur zu Grundlagen der Logik in der Informatik 1. Januar 2025

Angaben zur Person (Bitte in Druckschrift ausfüllen!):

Name, Vorname: ....

Geburtsdatum: ....

Matrikelnummer: ....

Studienfach (Bitte ankreuzen):

☐ Informatik ☐ Wirtschaftsinformatik ☐ Wirtschaftsmathematik ☐ Computational Engineering ☐ Mathematik ☐ Data Science

☐ Sonstiges (Bitte angeben): ....

Nicht von der Kandidatin bzw. vom Kandidaten auszufüllen !!!

Punktzahlen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Max. Punkte	16	9	10	13	20	12	10	90
Erreichte Punkte								

Bonuspunkte: **Gesamtpunkte:** **Note:**

Organisatorische Hinweise

Die folgenden Hinweise bitte aufmerksam lesen und die Kenntnisnahme durch Unterschrift bestätigen!

- Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und einen Lichtbildausweis zur Personenkontrolle bereit!
- Die angegebene Punkteverteilung gilt unter Vorbehalt.
- Es ist *eine beidseitig beschriebene DIN-A4-Seite* als Hilfsmittel zugelassen.
- Die Lösung einer Aufgabe muss auf den vorgesehenen freien Raum auf dem Aufgabenblatt geschrieben werden; die Rückseite des Blatts kann mitverwendet werden. Wenn der Platz nicht ausreicht, können bei der Aufsicht zusätzliche Blätter angefordert werden.
- Wenn Sie die Prüfung aus gesundheitlichen Gründen abbrechen müssen, so muss Ihre Prüfungsunfähigkeit durch eine Untersuchung in der Universitätsklinik nachgewiesen werden. Melden Sie sich in jedem Fall bei der Aufsicht und lassen Sie sich das entsprechende Formular aushändigen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- **Überprüfen Sie Ihr Exemplar der Klausur auf Vollständigkeit (7 geheftete Blätter inklusive Deckblatt und Hinweise) und einwandfreies Druckbild! Vergessen Sie nicht, auf dem Deckblatt die Angaben zur Person einzutragen!**

Erklärung

Durch meine Unterschrift bestätige ich den Empfang der vollständigen Klausurunterlagen und die Kenntnisnahme der obigen Informationen.

Erlangen, 1. Januar 2025 ....

(Unterschrift)

Aufgabe 1: Aussagenlogische Konsequenz und Beweise (16 Punkte)

a) Zeigen oder widerlegen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass folgende logische Konsequenzen gelten. Im negativen Fall muss die Wahrheitstafel nicht vollständig angegeben werden, sondern es reicht, wenn sie ein Gegenbeispiel enthält, das aber deutlich markiert werden muss (d.h. eine unkommentierte Wahrheitstafel ohne deutlich identifiziertes Gegenbeispiel gilt nicht als Lösung). Im positiven Fall sollte kurz erläutert werden, warum die Wahrheitstafel die logische Konsequenz bestätigt.

i) $A \to B \models \neg A \vee \neg B$

ii) $A \to \neg A \models A \to B$

b) Man betrachte das folgende Beweisskript in Coq:

```
1  Require Import Classical.

2  Parameters A B : Prop.

3  Theorem Q1 : ~A \/ B -> (A -> B).
4  Proof.
5    intro H.
6    destruct H as [L|R].

7      intro x.
8      exfalso.
9      apply L.
10     exact x.

11     intro y.
12     exact R.

13 Qed.
```

Geben Sie für jeden der Schritte 6–11 das jeweils aktuelle Unterziel (subgoal) und Annahmen samt Labels jeweils *nach* Durchführung des Schritts an, indem Sie die umseitige Tabelle vervollständigen. (*Achtung*: es kann weitere Unterziele geben, die gewissermaßen im Stapel unter dem aktuellen liegen; anzugeben ist zur Ersparnis von Schreibarbeit aber eben jeweils nur das aktuelle.) Die Antworten für Schritte 4–5 sind als Beispiele schon eingetragen.

Hinweis: Zur Vermeidung übermäßiger Schreibarbeit können Sie auf schon einmal angegebene Annahmen mit Label später einfach über ihr Label verweisen. Man erinnere sich, dass Taktiken immer auf das erste von mehreren Unterzielen angewendet werden.

Schritt	Annahmen	Aktuelles Unterziel
4	`Proof.`	
	—	`~A \/ B -> (A -> B)`
5	`intro H.`	
	`H : ~A \/ B`	`A -> B`
6	`destruct H as [L|R].`	
7	`intro x.`	
8	`exfalso.`	
9	`apply L.`	
10	`exact x.`	
11	`intro y.`	
12	`exact R.`	
	—	`No more subgoals.`
13	`Qed.`	

Aufgabe 2: Formalisierung in Prädikatenlogik (9 Punkte)

Wir betrachten Arithmetik über dem Zahlraum der ganzen Zahlen $\mathbb{N}$ (man erinnere sich, dass $0 \in \mathbb{N}$). Als Signatursymbole verwenden wir (ausschließlich!) die binären Funktionen $+$ und $*$ in Infixschreibweise, die Konstanten 0 und 1 sowie ein binäres Prädikat $<$ in Infixschreibweise; unsere Signatur ist also

$$\Sigma = \{+/2, */2, 0/0, 1/0, </2\}.$$

Formalisieren Sie folgende Aussagen als Formeln in Prädikatenlogik erster Stufe (inklusive „=“, wenn benötigt) über dieser Signatur. (Gefragt ist nur die Angabe der Formeln, nicht etwa Beweise!)

a) Es gibt genau eine Zahl, die kleiner als 1 ist.

b) Keine Zahl größer als 1 ist durch 0 teilbar.

c) Wenn eine Zahl alle Zahlen teilt, dann ist sie zwingend 1.

Hinweis: Die Signatur und die Syntax sollen ausdrücklich nicht erweitert werden.

Schreiben Sie Ihre Antworten in die dafür vorgesehenen Boxen.

a)

b)

c)

Aufgabe 3: Unifikation (10 Punkte)

Wenden Sie für $\Sigma = \{f/2, g/2, h/1\}$ den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung an, um zu entscheiden, ob die Gleichung

$$f\big(\, h(y),\ g(y, h(z))\,\big) \doteq f\big(\, x,\ g(h(z), x)\,\big)$$

unifizierbar ist, und ggf. einen *allgemeinsten Unifikator* zu berechnen. Hierbei sind x, y, z Variablen und f, g, h Funktionssymbole.

Hinweis: Gefragt ist der korrekte Unifikationsalgorithmus gemäß Vorlesung, also mit Occurs Check. Gefordert sind sowohl die letztendliche (*explizite!*) Antwort als auch die einzelnen vom Algorithmus durchgeführten Umformungsschritte, unter Angabe der jeweils verwendeten Umformungsregel.

Aufgabe 4: Prädikatenlogische Resolution (13 Punkte)

Zeigen Sie die Unerfüllbarkeit der untenstehenden Klauselmenge über der Signatur $\Sigma = \{R/2, f/1, g/1, a/0, b/0\}$, indem Sie aus den gegebenen Klauseln mittels prädikatenlogischer Resolution die leere Klausel herleiten. Zeichnen Sie dazu in jedem Schritt Verbindungslinien von den beiden zu resolvierenden Klauseln zur neu hergeleiteten Resolvente. Annotieren Sie eine der Linien mit der jeweils verwendeten Substitution. In den Klauseln sind a und b Konstanten, während v, w, x, y Variablen sind.

Hinweis: Es hilft, sich das Argument vorab informell klarzumachen.

$$\{R(a, g(b))\} \qquad \{\neg R(v, w), R(f(f(v)), w)\} \qquad \{\neg R(f(x), y), R(x, g(y))\} \qquad \{\neg R(a, g(g(z)))\}$$

Aufgabe 5: Natürliches Schließen (20 Punkte)

Geben Sie eine formale Herleitungen für die folgenden Aussagen in Aussagenlogik (Aufgabe a) bzw. in Prädikatenlogik erster Stufe über der Signatur $\Sigma = \{R/2, P/1, f/1, a/0\}$ (Aufgabe b) im jeweiligen System natürlichen Schließens gemäß Vorlesung an (hier sind R, P, Prädikatensymbole und f, a Funktionssymbole).

Achtung: Es darf *nur* natürliches Schließen verwendet werden; *nicht* zulässig sind Umformungen außerhalb des Systems.

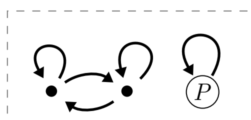
a) $\neg B \to \neg A \vdash A \to B$

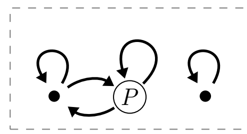
b) $\forall x.\ P(x) \rightarrow \forall y.R(y,y) \ \vdash \ (\forall x.P(x)) \rightarrow \forall y.R(y,y)$

Aufgabe 6: Prädikatenlogische Modelle (12 Punkte)

Sei Σ die Signatur $\{R/2, P/1\}$ (aus ausschließlich Prädikatensymbolen). Zur einfacheren Notation von Σ-Modellen stellen wir R mittels gerichteten Kanten zwischen Elementen des Grundbereichs dar und markieren solche Elementen mit „P“, wenn sie P erfüllen.

a) Geben Sie eine geschlossene Formel ϕ mit maximal 2 Quantoren an, so dass $\mathfrak{M} \models \phi$, aber $\mathfrak{N} \not\models \phi$ für

$\mathfrak{M} =$ 

$\mathfrak{N} =$ 

b) Geben Sie ein Modell $\mathfrak{M}$ mit maximal 3 Elementen im Träger an, so dass

$$\mathfrak{M} \models \forall x.\exists y.R(x,y), \qquad \text{aber} \qquad \mathfrak{M} \not\models \exists y.\forall x.R(x,y).$$

c) Geben Sie ein Modell $\mathfrak{M}$ mit maximal 3 Elementen im Träger an, so dass

$$\mathfrak{M} \models (\forall x.P(x)) \to \forall y.R(y,y), \qquad \text{aber} \qquad \mathfrak{M} \not\models \forall x.\, P(x) \to \forall y.R(y,y).$$

Aufgabe 7: Aussagenlogische Semantik (10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathscr{F} \to \mathcal{P}(\mathscr{A})$ sei durch

$$f(\psi) = \{A \in \mathscr{A} \mid \text{Für alle } \kappa \colon \mathscr{A} \to 2 \text{ gilt: wenn } \kappa(A) = \top \text{ dann } \kappa \models \psi\}$$

definiert, wobei $\mathscr{F}$ die Menge aller aussagenlogischen Formeln über den Atomen $\mathscr{A}$ ist.

a) Geben Sie eine Formel α mit $f(\alpha) = \{B\}$ und $\mathsf{At}(\alpha) = \{B, C\}$ an (ohne Beweis). (Erinnerung: $\mathsf{At}(\alpha) \subseteq \mathscr{A}$ bezeichnet die Menge der Atome, die in α vorkommen.)

b) **Beweisen Sie** detailliert: jede Formel β mit $f(\beta) \setminus \mathsf{At}(\beta) \neq \emptyset$ ist gültig. Begründen Sie alle Zwischenschritte. (Hinweis: Hier ist keine Induktion nötig!)

Sie dürfen (ohne Beweis) das Lemma aus der Vorlesung verwenden, dass für alle $\phi \in \mathscr{F}$ und $\kappa, \kappa' \colon \mathscr{A} \to 2$ gilt: wenn $\kappa(A) = \kappa'(A)$ für alle $A \in \mathsf{At}(\phi)$, dann $\kappa \models \phi \iff \kappa' \models \phi$.