GLoIn-Übungsblatt 12

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2024/25) vom 15. Januar 2025
Tutorien vom 20.01. bis 24.01.; Abgabe bis Donnerstag, **30. Januar 2025** (11:00 Uhr)

Präsenzaufgabe P12.1 Resolution

Zeigen Sie mittels Resolution, dass folgende Klauselmengen unerfüllbar sind:
($\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{R}/2, a/0, f/1, g/2\}$)

(a) $\{\{\mathsf{P}(a)\},\ \ \{\neg\mathsf{P}(x), \neg\mathsf{R}(x,y), \mathsf{P}(y)\},\ \ \{\mathsf{R}(z, f(z))\},\ \ \{\neg\mathsf{P}(f(f(a)))\}\}$

(b) $\{\{\neg\mathsf{R}(g(x,y),y)\},\ \ \{\mathsf{R}(w, g(v,w))\},\ \ \{\mathsf{R}(r, g(s,t))\}\}$

Aufgabe A12.1 Resolution (7 Punkte)

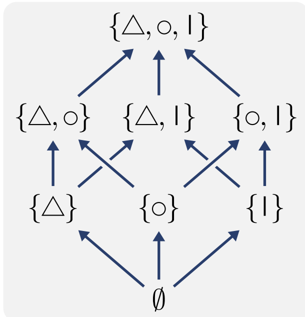
Sei $\Sigma = \{\mathsf{R}/2, \mathsf{P}/1, f/1, a/0\}$. Zeigen Sie mittels Resolution, dass die folgenden Klauselmengen unerfüllbar sind:

(a) $\{\{\mathsf{R}(f(f(v)), v)\},\ \ \{\neg\mathsf{R}(f(x), y), \neg\mathsf{R}(y,z), \mathsf{P}(y)\},\ \ \{\neg\mathsf{P}(f(w))\}\}$. *3 Punkte*

(b) $\{\{\neg R(v,w), R(w,v)\},\ \ \{R(u, f(u))\},\ \ \{\neg R(x,y), \neg R(y,z), R(x,z)\},\ \ \{\neg R(a,a)\}\}$ *4 Punkte*

Aufgabe A12.2 Ordnungen und Schranken (5 Punkte)

In der Signatur $\Sigma = \{\mathsf{R}/2, u/2, c/1, a/0, b/0\}$ betrachten wir R als Ordnungsrelation, c als Komplement und u als obere Schranke. Zur Veranschaulichung dient das Modell rechts auf dem Träger $M := \mathcal{P}(\{\triangle, \circ, |\})$. Hier können wir R als „Teilmenge von“ verstehen, angedeutet durch Kanten (zwecks Übersichtlichkeit wurden Kanten weggelassen, die sich aus Reflexivität und Transitivität ergeben), c als Komplement und u als Vereinigungsmenge. Der Schnitt zweier Mengen ist ein Beispiel einer *unteren Schranke*.



Konstruieren Sie aus Komplement und oberen Schranken eine untere Schranken z für a und b, indem Sie per Resolution zeigen, dass folgende Klauselmenge unerfüllbar ist: *4 Punkte*

$$\{\ \overbrace{\{\mathsf{R}(s, u(s,t))\},\ \{\mathsf{R}(r, u(q,r))\}}^{\text{„}u\text{ liefert obere Schranken“}},\ \overbrace{\{\neg\mathsf{R}(c(x), y), \mathsf{R}(c(y), x)\}}^{\text{„}c\text{ liefert Komplemente“}},\ \ \overbrace{\{\neg\mathsf{R}(z,a), \neg\mathsf{R}(z,b)\}}^{\text{„Gesucht: untere Schranke }z\text{“}}\ \ \}$$

Wie lautet die untere Schranke z von a und b? (Gesucht ist ein Term ohne freie Variablen) *1 Punkt*

Tipp: Überlegen Sie sich zuerst ein informelles Argument, inspiriert von De Morgan!

Aufgabe A12.3 Prädikatenlogische Folgerung (4 Punkte)

Sind über der Signatur $\Sigma = \{\mathsf{R}/2, \mathsf{P}/1\}$ folgende logischen Folgerungen $\phi \models \psi$ wahr? Falls ja, geben Sie einen Beweis mittels natürlichen Schließens an. Falls nein, geben Sie ein Modell (mit max. 3 Elementen im Träger) an, in dem ϕ erfüllt wird aber nicht ψ.

(a) $\exists x.(\mathsf{P}(x) \to \forall y.\mathsf{R}(y,y)) \ \models\ (\exists x.\mathsf{P}(x)) \to \forall y.\mathsf{R}(y,y)$ *2 Punkte*

(b) $(\forall x, y.\ \mathsf{R}(x,y) \lor \mathsf{R}(y,x)) \ \models\ \exists x, y.\ \mathsf{R}(x,y) \land \mathsf{R}(y,x)$ *2 Punkte*