GLoIn-Übungsblatt 11

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2024/25) vom 8. Januar 2025
Tutorien vom 13.01. bis 17.01.; Abgabe bis Donnerstag, **23. Januar 2025** (11:00 Uhr)

Präsenzaufgabe P11.1 Unifikation

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen in der Signatur der Peano-Arithmetik ($\Sigma = \{+/2, s/1, 0/0\}$; vgl. A9.3) unifizierbar sind, und, falls ja, einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen.

(a) $(x + 0) + (y + 0) \doteq x + s(x)$;

(b) $x + s(y) \doteq 0 + s(s(x))$.

Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel des Unifikationalgorithmus. Was passiert, wenn man den Occurs-Check aus dem Unifikationsalgorithmus weglässt, d.h. elim auf $x \doteq E$ anwendet, ohne $x \in \mathsf{FV}(E)$ zu prüfen?

Aufgabe A11.1 Unifikation (9 Punkte)

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen in der Signatur $\Sigma = \{f/1, g/2, +/2, a/0\}$ unifizierbar sind. Falls ja, geben Sie einen allgemeinsten Unifikator an.

3 Punkte (a) $g(f(x), f(a))) \doteq g(f(y), f(y))$

3 Punkte (b) $g(f(f(x)), y) \doteq g(y, f(a))$

(c) $(x + x) + x \doteq y + (y + y)$ 3 Punkte

Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel.

Aufgabe A11.2 Unifikation & Natürliches Schließen (5 Punkte)

In etlichen Programmiersprachen treten während des Kompilierens Unifkationsprobleme auf (u.a. während `apply` in Coq). Sei $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, f/1, g/3\}$, wobei P Relationssymbol ist und f, g Funktionssymbole sind. Beweisen Sie $\forall x. \forall y. \mathsf{P}(g(x, f(x), y)) \;\vdash\; \exists z. \exists w. \mathsf{P}(g(f(z), w, f(w)))$ indem Sie:

(a) einen Unifikator für $g(x, f(x), y) \doteq g(f(z), w, f(w))$ (wie oben) berechnen … 3 Punkte

(b) und anschließend mit diesem Wissen einen Beweis mittels natürlichen Schließens führen. 2 Punkte
Hinweis: ($\forall$E) eliminiert nur einen Allquantor!

Aufgabe A11.3 (3 Punkte)

Ein Barbier ist jemand, der genau die rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Zeigen Sie, dass die Existenz eines Barbiers inkonsistent ist, indem Sie über der Signatur $\Sigma = \{\mathsf{R}/2\}$ zeigen:

$$(\exists b.\ \forall x.\ \mathsf{R}(b, x) \leftrightarrow \neg\mathsf{R}(x, x)) \;\vdash\; \bot$$

Hier verstehen wir $\phi \leftrightarrow \psi$ als Notation für $(\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi)$.

Bonusaufgabe A11.4 Naive Mengenlehre (1 Bonuspunkt)

Mengenlehre trifft Aussagen über derselben Signatur, wobei wir nun $R(y, x)$ als „y enthält x" lesen (üblicherweise „$x \in y$" geschrieben). Über dieser Signatur hat naive Mengenlehre die Axiome:

$$\Phi := \{\ \exists z.\ \forall x.\ R(z, x) \leftrightarrow \phi \ \mid \phi \in \mathscr{F}_{\mathsf{FO}}(\Sigma) \text{ ist eine FO-Formel mit } z \notin \mathsf{FV}(\phi)\} \ \subseteq\ \mathscr{F}_{\mathsf{FO}}(\Sigma)$$

In Worten: zu jeder Eigenschaft ϕ existiert eine Menge z, die als Elemente genau solche x enthält, die ϕ erfüllen. Nutzen Sie das Ergebnis aus A11.3, um zu zeigen, dass naive Mengenleere inkonsistent ist, also $\Phi \vdash \bot$.