GLoIn-Übungsblatt 10

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2024/25) vom 18. Dezember 2024
Tutorien vom 07.01. bis 10.01.; Abgabe bis Donnerstag, **16. Januar 2025** (11:00 Uhr)

Präsenzaufgabe P10.1 Stein der Auferstehung

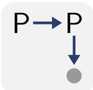
In *Harry Potter und die Heligtümer des Todes* (S. 420) werden Nichtexistenz-Beweise diskutiert:

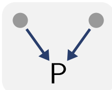
> „Wie kann ich denn *jemals* beweisen, dass [der Stein der Auferstehung] nicht existiert? Erwarten Sie, dass ich sämtliche Kieselsteine der Welt einsammle und sie prüfe?“

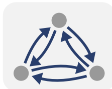
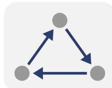
Verifizieren Sie dies, indem Sie die Äquivalenz von $\forall x. \mathsf{S}(x) \to \neg \mathsf{A}(x)$ und $\neg \exists y. \mathsf{S}(y) \wedge \mathsf{A}(y)$ in Coq zeigen (Verwenden Sie `stein.v` als Vorlage).

Präsenzaufgabe P10.2 Unterscheidbarkeit per FOL

Geben Sie für jedes der folgenden Paare von Modellen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ für $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{R}/2\}$ eine Formel ϕ an (mit $\mathsf{FV}(\phi) = \emptyset$), die in $\mathfrak{M}$ erfüllt wird ($\mathfrak{M} \models \phi$) aber nicht in $\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N} \not\models \phi$):

(a) $\mathfrak{M} :=$ 

$\mathfrak{N} :=$ 

(b) $\mathfrak{M} :=$  $\mathfrak{N} :=$ 

Präsenzaufgabe P10.3 Erfüllbarkeit

Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln ϕ für $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{R}/2\}$ erfüllbar sind, indem Sie graphisch ein Modell $\mathfrak{M}$ angeben, so dass $\mathfrak{M} \models \phi$.

(a) $(\forall x. \mathsf{P}(x) \to \exists y. \neg(x = y) \wedge \mathsf{R}(x, y)) \wedge \forall x. \mathsf{R}(x, x) \vee \mathsf{P}(x)$

(b) $(\exists x. \mathsf{P}(x)) \wedge (\exists x. \neg \mathsf{P}(x)) \wedge \forall x, y. \mathsf{R}(x, y)$

(c) $(\exists x, y. \mathsf{R}(x, y)) \wedge \forall x, y. \mathsf{R}(x, y) \leftrightarrow (\mathsf{P}(x) \leftrightarrow \neg \mathsf{P}(y))$

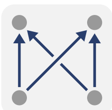
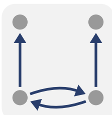
Aufgabe A10.1 Unterscheidbarkeit per FOL (4 Punkte)

Geben Sie für jedes der folgenden Paare von Modellen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ für $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{R}/2\}$ eine Formel ϕ an (mit $\mathsf{FV}(\phi) = \emptyset$), die in $\mathfrak{M}$ erfüllt ist ($\mathfrak{M} \models \phi$) aber in $\mathfrak{N}$ nicht erfüllt ist ($\mathfrak{N} \not\models \phi$):

(a) $\mathfrak{M} :=$ 

$\mathfrak{N} :=$ 

2 Punkte

(b) $\mathfrak{M} :=$  $\mathfrak{N} :=$  *2 Punkte*

Aufgabe A10.2 Erfüllbarkeit (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln ϕ für $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{R}/2\}$ erfüllbar sind, indem Sie ein Modell $\mathfrak{M}$ angeben, so dass $\mathfrak{M} \models \phi$. Um das jeweilige Modell $\mathfrak{M}$ zu definieren, genügt es, die graphische Darstellung anzugeben (wie in vorigen Aufgaben).

(a) $(\forall x. \exists y. \mathsf{R}(x, y)) \quad \wedge \quad \neg(\exists y. \forall x. \mathsf{R}(x, y))$ *2 Punkte*

(b) $\forall y. \neg \mathsf{R}(y, y) \leftrightarrow \exists x. \mathsf{R}(x, y)$ *2 Punkte*

(c) $\forall k. \exists m, v. \mathsf{R}(k, m) \wedge \mathsf{R}(k, v) \wedge \neg(m = v)$ *2 Punkte*

Aufgabe A10.3 Es gibt nur ein ... (4 Punkte)

Viele Existenzaussagen in der Mathematik betreffen nicht nur gewöhnliche Existenz, sondern *eindeutige* Existenz (z. B. existiert für jede natürliche Zahl eine *eindeutige* Primfaktorzerlegung). Die übliche Notation hierfür ist $\exists! x.\, \phi$: „Es gibt *genau ein* x, das ϕ erfüllt“. Grundsätzlich sind zwei Kodierungen von $\exists!$ in Prädikatenlogik denkbar:

(i) $\exists x.\ (\phi \wedge \forall y.\, \phi[y/x] \to x = y)$
 („Es gibt eines mit der Eigenschaft, dass jedes weitere gleich diesem sein muss“)

(ii) $(\exists x.\, \phi) \wedge (\forall x_1, x_2.\, \phi[x_1/x] \wedge \phi[x_2/x] \to x_1 = x_2)$
 („Zum einen gibt es mindestens eines, und zum anderen gibt es höchstens eins“)

Coq definiert `exists!` mittels (i). Zeigen Sie in Coq, dass die beiden Definitionen äquivalent sind, indem Sie `exists_uniq.v` vervollständigen.

Hinweis 1: Coq verwendet in der Definition von `exists!` eine Hilfsdefinition namens `unique`. Falls `unique` im Kontext erscheint, können Sie dies mittels `unfold unique in *` auffalten, um die prädikatenlogische Formel (wie in (i)) zu sehen.

Hinweis 2: Sie können Unterbeweise mittels `admit` auslassen, um sie später zu bearbeiten. Für die volle Punktzahl darf Ihre Abgabe kein `admit` mehr verwenden.

Tipp: Verwenden Sie `assert` an geeigneter Stelle.

Aufgabe A10.4 Trinkerparadoxon (5 Punkte)

Das sogenannte *Trinkerparadoxon* behauptet von jeder Kneipe:
„Es gibt jemanden, so dass, wenn er trinkt, alle trinken“.

(a) Formalisieren Sie das Trinkerparadoxon in Logik erster Stufe für die Signatur bestehend aus dem Prädikat $\mathsf{T}/1$ für „trinkt“. *1 Punkt*

(b) Beweisen Sie es in Coq, indem Sie `trinker.v` ergänzen. *4 Punkte*
 Hinweis: Sie dürfen bei dieser Aufgabe *ausnahmsweise* die Taktik `apply classic.` verwenden, die ein Ziel der Form $\phi \vee \neg\phi$ löst! Nutzen Sie also `assert` für entsprechende Formeln.