GLoIn-Übungsblatt 9

T.CS

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2024/25) vom 11. Dezember 2024
Tutorien vom 16.12. bis 20.12.; Abgabe bis Donnerstag, **9. Januar 2025** (11:00 Uhr)

Präsenzaufgabe P9.1 Substitution

Werten Sie (über der Signatur $\Sigma = \{\mathsf{R}/2, \mathsf{Q}/1, \mathsf{f}/2, \mathsf{c}/0\}$) folgende Substitution aus:

$$((\forall x.\, \mathsf{R}(x, y)) \wedge \mathsf{Q}(y))\,[\mathsf{c}/x, \mathsf{f}(x, y)/y, \mathsf{c}/z]$$

Präsenzaufgabe P9.2 Natürliches Schließen

Zeigen Sie mittels natürlichen Schließens (über $\Sigma = \{\mathsf{R}/2, \mathsf{P}/1, \mathsf{Q}/1, \mathsf{f}/1, \mathsf{g}/2, \}$):

(a) $\exists y.\, \mathsf{R}(x, \mathsf{f}(y)) \vdash \exists z.\, \mathsf{R}(x, z)$

(b) $\forall x.\, \mathsf{P}(x) \wedge \mathsf{Q}(x) \vdash (\forall x.\, \mathsf{P}(x)) \wedge \forall y.\, \mathsf{Q}(y)$

(c) $\vdash \forall x.\, \exists y.\, (\mathsf{f}(x) = y)$.

Aufgabe A9.1 Substitution (3 Punkte)

Berechnen Sie die folgende Substitution (über der Signatur $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{S}/2, \mathsf{f}/2, \mathsf{g}/1\}$):

$$(\forall x.\, \mathsf{P}(z) \wedge \forall y.\, \mathsf{S}(x, y))\,[\mathsf{f}(x, y)/x, \mathsf{g}(y)/y, \mathsf{g}(x)/z].$$

Aufgabe A9.2 Natürliches Schließen (8 Punkte)

Zeigen Sie mittels natürlichen Schließens:

(a) $\forall x.\ \mathsf{R}(x, x) \quad \vdash \quad \forall y.\exists z.\ \mathsf{R}(z, y)$ *2 Punkte*

(b) $\forall u, v.\ \mathsf{R}(u, v) \to \mathsf{P}(u) \quad \vdash \quad \forall x.\, (\exists y.\, \mathsf{R}(x, y)) \to \mathsf{P}(x)$ *3 Punkte*

(c) $\{\forall v.\ R(u, v) \to Q(v),\ \exists w.\ R(u, w) \wedge P(w)\} \quad \vdash \quad \exists x.\ R(u, x) \wedge P(x) \wedge Q(x)$ *3 Punkte*

Aufgabe A9.3 Peano-Arithmetik (7 Punkte)

Peano-Arithmetik ist eine Formalisierung der natürlichen Zahlen in Logik erster Stufe (aus dem Jahr 1889!) über den Funktionssymbolen $+$ (Addition), $\times$ (Multiplikation), s (Nachfolger) und 0 (Null). Die unterliegende Signatur ist also $\Sigma = \{+/2, \times/2, \mathsf{s}/1, 0/0\}$. Zusätzliche Symbole dürfen nur in Form von Abkürzungen verwendet werden, z. B. $1 := \mathsf{s}(0)$ und $2 := \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$.

Formalisieren Sie folgende Aussagen in Peano-Arithmetik:

(a) n ist Primzahl. *1 Punkt*

(b) Quadratzahlen sind durch 3 teilbar. *2 Punkte*

(c) $n < m$; verwenden Sie hier weder Negation noch Implikation! *2 Punkte*
(Lediglich $\forall$, $\exists$, $\vee$, $\wedge$, $=$ und Terme sind erlaubt)

(d) Die Abbildung $n \mapsto n + 2$ (auf natürlichen Zahlen) ist injektiv. *2 Punkte*

Hinweis: Sie dürfen $+$ und $\times$ in der üblichen Infix-Notation verwenden, also $n+m$ statt $+(n, m)$. Es sind nur die Formalisierungen gefragt, nicht etwa Beweise (mindestens eine Aussage ist ja auch klarerweise nicht gültig).