GLoIn-Übungsblatt 5

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2024/25) vom 6. November 2024
Tutorien vom 18.11. bis 22.11.; Abgabe bis Donnerstag, **28. November 2024** (11:00 Uhr)

Präsenzaufgabe P5.1 MIU

Das Buch *Gödel, Escher, Bach* (kurz: *GEB*; 1979; mit dem Pulitzer-Preis ausgezeichnet) von Douglas R. Hofstadter erkundet die Grenzen mathematischer Beweisbarkeit und zieht Parallelen zwischen den Werken von

- Kurt Gödel (Logiker, 1906-1978)
- Maurits Cornelis Escher (Grafiker, 1898-1972)
- Johann Sebastian Bach (Komponist, 1685-1750)

Der Slogan: selbst komplexe mathematische Beweise sind einfach nur Folgen von kleinschrittigen Anwendungen simpler logischer Regeln (wie ($\wedge$I), ($\wedge$E1), etc). Um den syntaktischen Charakter zu verdeutlichen, wird in GEB mit einem fiktiven MIU-System gespielt, das Zeichenketten aus M, I und U nach den folgenden Regeln manipuliert:

(1) MI ist herleitbar (Axiom).

(2) $x\mathsf{I} \rightsquigarrow x\mathsf{IU}$ (Endet eine Zeichenkette auf I, darf man ein U anhängen.)

(3) $\mathsf{M}x \rightsquigarrow \mathsf{M}xx$ (Die komplette Zeichenkette nach M darf man verdoppeln.)

(4) $x\mathsf{III}y \rightsquigarrow x\mathsf{U}y$ (Jedes III darf durch U ersetzt werden.)

(5) $x\mathsf{UU}y \rightsquigarrow xy$ (Jedes UU darf gelöscht werden.)

Lassen sich die folgenden Zeichenketten herleiten? Beweisen Sie Ihre Antwort.

(a) MUI

(b) MUII

(c) MU

Aufgabe A5.1 (7 Punkte)

Für $A \in \mathscr{A}$ definieren wir die Funktion $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathscr{F}$:

$$\phi(0) \;=\; A \to B \qquad \phi(k+1) \;=\; \phi(k) \to A$$

Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel $\phi(2 \cdot n + 2)$ *herleitbar* ($\vdash$) ist:

(a) Verifizieren Sie den Basisfall. (*Hinweis*: $0 \in \mathbb{N}$) *3 Punkte*

(b) Verifizieren Sie den Induktionsschritt; geben Sie explizit die Induktionshypothese an und markieren Sie, wo Sie diese verwenden. *3 Punkte*

Ist $\phi(2 \cdot n + 3)$ (für $n \in \mathbb{N}$) gültig? Begründen Sie Ihre Aussage. *1 Punkt*

Aufgabe A5.2 (6 Punkte)

Auf Blatt 4 wurde die Funktion $L\colon (\mathscr{A} \to 2) \to \mathcal{P}(\mathscr{F})$ durch $L(\kappa) = \{\phi \in \mathscr{F} \mid \kappa \models \phi\}$ definiert. Beweisen Sie: für alle $\kappa\colon \mathscr{A} \to 2$ ist $L(\kappa)$ maximal konsistent.