GLoIn-Übungsblatt 4

T.CS

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2024/25) vom 6. November 2024
Tutorien vom 11.11. bis 15.11.; Abgabe bis Donnerstag, **21. November 2024** (11:00 Uhr)

Hinweise und Definitionen

Zu jeder Menge X gibt es eine *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X)$, die genau aus den Teilmengen von X besteht, formal:

$$\forall S.\quad S \in \mathcal{P}(X) \quad\Longleftrightarrow\quad S \subseteq X$$

Grundsätzlich gilt, dass zwei Mengen R, T genau dann gleich sind ($R = T$), wenn sie die gleichen Elemente haben, also:

$$R = T \qquad\Longleftrightarrow\qquad (\forall r \in R.\, r \in T \quad\text{und}\quad \forall t \in T.\, t \in R)$$

Daraus ergibt sich:

- Zwei Funktionen $f, g\colon X \to Y$ sind genau dann gleich ($f = g$), wenn für alle $x \in X$ die Aussage $f(x) = g(x)$ gilt.
- Zwei Teilmengen $S, S' \subseteq X$ sind genau dann gleich, wenn für alle $x \in X$ die Aussage $x \in S \Leftrightarrow x \in S'$ gilt.

Präsenzaufgabe P4.1

Im Wahrheitslemma wird eine Formelmenge in eine Wahrheitsbelegung umgewandelt. Grundsätzlich stehen Teilmengen in einem starken Zusammenhang zu Funktionen nach 2, wie wir hier sehen: Wir definieren eine Funktion W, die jeder Menge von Atomen $S \subseteq \mathscr{A}$ eine Wahrheitsbelegung zuordnet:

$$W : \mathcal{P}(\mathscr{A}) \to (\mathscr{A} \to 2) \qquad W(S) = \ A \mapsto \begin{cases} \top & \text{falls } A \in S \\ \bot & \text{falls } A \notin S \end{cases}$$

Beweisen Sie:

(a) W ist injektiv.

(b) W ist surjektiv.

Präsenzaufgabe P4.2

Gegeben sei die Funktion $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$s(0) = 0 \qquad s(n+1) = s(n) + n + 1.$$

Beweisen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $s(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ gilt.

Aufgabe A4.1 Intuitionismus (6 Punkte)

Eine Herleitung im Kalkül des natürlichen Schließens heißt *intuitionistisch* (oder auch *konstruktiv*), wenn in ihr nicht die Regel ($\neg\neg$E) verwendet wird. Wir schreiben $\phi \vdash_{\mathsf{int}} \phi$, wenn sich ψ aus ϕ intuitionistisch herleiten lässt. Doch warum sollte man ($\neg\neg$E) vermeiden wollen? Weil Beweisassistenten wie Coq (ab Übungsblatt 6) intern mit dem Curry-Howard-Isomorphismus arbeiten, der besagt:

Intutionistische Beweise *sind* Programme!

Details wie die dazu gehörige Programmiersprache lernen Sie in *Theorie der Programmierung* kennen. Für die aktuelle Aufgabe genügt es, auf ($\neg\neg$E) zu verzichten. Beginnen wir mit ein paar Beispielen:

(a) Zeigen Sie $\neg\neg A \wedge \neg\neg B \vdash_{\mathsf{int}} \neg\neg(A \wedge B)$ (also ohne ($\neg\neg$E)). *2 Punkte*

(b) Zeigen Sie $A \wedge B \vdash_{\mathsf{int}} \neg(\neg A \vee \neg B)$ *2 Punkte*

(c) Zeigen Sie $\vdash_{\mathsf{int}} \neg\neg\neg A \to \neg A$ *2 Punkte*

Aufgabe A4.2 (4 Punkte)

In Beispiel 2.20 im Skript wird behauptet: „$\kappa_2 \not\models (A \vee \neg B) \to B$ für alle κ_2 mit $\kappa_2(B) = \bot$“.

(a) Zeigen Sie $\neg B \models \neg((A \vee \neg B) \to B)$ per Wahrheitstafel. *2 Punkte*

(b) Zeigen Sie $\neg B \vdash \neg((A \vee \neg B) \to B)$ mittels natürlichen Schließens. *2 Punkte*

Aufgabe A4.3 (5 Punkte)

Wir definieren eine Funktion L, die jeder Wahrheitsbelegung κ die Menge der Formeln zuordnet, die von κ erfüllt werden:

$$L\colon (\mathscr{A} \to 2) \to \mathcal{P}(\mathscr{F}) \qquad L(\kappa) = \{\phi \in \mathscr{F} \mid \kappa \models \phi\}$$

Beweisen Sie für alle Mengen $\mathscr{A}$:

(a) L ist injektiv. *3 Punkte*

(b) L ist nicht surjektiv. *2 Punkte*

Hinweis: Beide Teilaufgaben müssen für beliebiges $\mathscr{A}$ korrekt sein, also unabhängig davon ob $\mathscr{A}$ endlich, unendlich, etc. ist. Nutzen Sie die Hinweise zur Gleichheit von Funktionen und Mengen (siehe Beginn dieses Übungsblatts).
Hinweis: Die Definition von injektiv bzw. surjektiv sind auf den vorherigen Übungsblättern sowie im Anhang A des Skripts zu finden.