Prof. Dr. Lutz Schröder
Lehrstuhl Informatik 8 (Theoretische Informatik)
Universität Erlangen-Nürnberg

Bachelorprüfung
Grundlagen der Logik in der Informatik
— Probeklausur

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1: Aussagenlogische Konsequenz und Beweise (15 Punkte)

a) Zeigen oder widerlegen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass folgende logische Konsequenzen gelten. Im negativen Fall muss die Wahrheitstafel nicht vollständig angegeben werden, sondern es reicht, wenn sie ein Gegenbeispiel enthält, das aber deutlich markiert werden muss (d.h. eine unkommentierte Wahrheitstafel ohne deutlich identifiziertes Gegenbeispiel gilt nicht als Lösung).

i) $((A \vee B) \to C) \models (A \to C)$;

ii) $((A \vee C) \wedge \neg(B \rightarrow C)) \models \neg A$.

b) Man betrachte das folgende Beweisskript in Coq:

```
1  Require Import Classical.
2
3  Parameters A B : Prop.
4
5  Theorem Q1 : ~(A -> B) -> A.
6  Proof.
7    intro i.
8    apply NNPP.
9    intro na.
10   assert (A -> B) as H.
11     intro a.
12     contradiction.
13   apply i.
14   exact H.
15 Qed.
```

Geben Sie für jeden der Schritte 9—13 das jeweils aktuelle Unterziel (subgoal) und Annahmen samt Labels jeweils *nach* Durchführung des Schritts an, indem Sie die umseitige Tabelle vervollständigen. (*Achtung*: es kann weitere Unterziele geben, die gewissermaßen im Stapel unter dem aktuellen liegen; anzugeben ist zur Ersparnis von Schreibarbeit aber eben jeweils nur das aktuelle.). Die Antworten für Schritte 6–7 sind als Beispiele schon eingetragen.

Hinweis: Zur Vermeidung übermäßiger Schreibarbeit können Sie auf schon einmal angegebene Annahmen mit Label später einfach über ihren Label verweisen.

Schritt	Annahmen	Aktuelles Unterziel
6	—	`~(A -> B) -> A`
7	`i : ~(A -> B)`	`A`
8	`i`	`~~A`
9		
10		
11		
12		
13		
14	—	`No more subgoals.`

Aufgabe 2: Semantik (10 Punkte)

Die Funktion $f\colon \mathscr{F} \to \mathcal{P}(\mathscr{A})$ sei durch

$$f(\psi) = \{A \in \mathscr{A} \mid \text{für alle } \kappa\colon \mathscr{A} \to 2 \text{ gilt: wenn } \kappa \models \psi \text{ dann } \kappa(A) = \top\}$$

definiert, wobei $\mathscr{F}$ die Menge der aussagenlogischen Formeln über den Atomen $\mathscr{A}$ ist.

a) Geben Sie eine Formel ψ an mit $f(\psi) = \{A, B\}$ (ohne Beweis).

b) Beweisen Sie: Wenn $\psi \in \mathscr{F}$ gültig ist, dann ist $f(\psi) = \emptyset$. Begründen Sie alle Zwischenschritte. (Hinweis: Hier ist keine Induktion nötig!)

Aufgabe 3: Formalisierung in Prädikatenlogik (12 Punkte)

Wir betrachten eine naive Mengenlehre mit einem zweistelligen Prädikat $\in$ in Infixschreibweise und einer einstelligen Funktion p. Hierbei nennen wir die Elemente des Grundbereichs *Mengen*; wir lesen $p(x)$ als die Potenzmenge von x, und $x \in y$ wie üblich als „x ist Element von y“. Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln erster Stufe über der Signatur $\{p/1, \in/2\}$:

a) z ist genau die Schnittmenge von x und y.

b) Keine Menge hat die selben Elemente wie ihre Potenzmenge.

c) Es gibt nur nichtleere Potenzmengen.

d) Wenn jede Menge sich selbst enthält, dann sind alle Mengen gleich.

Hinweis: Es sollen explizit keine neuen Signatursymbole (wie etwa „Schnittmenge“) eingeführt werden; Sie dürfen aber Abkürzungen für Formeln definieren. Man muss gegebenenfalls statt eines Begriffs die ihn definierende Eigenschaft verwenden. Nicht erklärte Begriffe wie „Teilmenge“ und „Vereinigung“ sind in ihrer üblichen Bedeutung zu verstehen.

Tragen Sie Ihre Antworten zu a)–d) in die unten dafür vorgesehenen Boxen ein.

a)

b)

c)

d)

Aufgabe 4: Unifikation (10 Punkte)

Wenden Sie für $\Sigma = \{f/2, g/2, h/1\}$ den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung an, um zu entscheiden, ob die Gleichung (mit Variablen x, y, z)

$$g(x, f(x, f(h(y), y))) \doteq g(x, f(g(z, z), z))$$

unifizierbar ist. Falls ja, geben Sie einen allgemeinsten Unifikator an. Achtung: es ist durchaus von Bedeutung, dass die beiden Seiten gemeinsame Variablen verwenden! Gefragt ist der korrekte Unifikationsalgorithmus gemäß Vorlesung, also mit Occurs Check. Wir bestehen hier anders als in der Vorlesung nicht auf den Notation $\doteq$ für zu lösende Gleichungen. Gefordert sind nicht nur die letztendliche (*explizite!*) Antwort, sondern auch die einzelnen vom Algorithmus durchgeführten Umformungsschritte, unter Angabe der jeweils verwendeten Umformungsregel.

Aufgabe 5: Prädikatenlogische Resolution (13 Punkte)

Zeigen Sie die Unerfüllbarkeit der aus den unten stehenden Klauseln bestehenden Klauselmenge zur Signatur $\Sigma = \{R/2, f/1, g/1, a/0, b/0\}$, indem Sie aus den gegebenen Klauseln mittels prädikatenlogischer Resolution die leere Klausel herleiten. Zeichnen Sie dazu in jedem Schritt Verbindungslinien von den beiden zu resolvierenden Klauseln zur neu hergeleiteten Resolvente. Annotieren Sie eine der Linien mit der jeweils verwendeten Substitution.

In den Klauseln sind a und b Konstanten, während x, y, z Variablen sind.
Hinweis: Es hilft, sich das Argument vorab informell klarzumachen.

$\{\neg R(f(x), y), R(x, g(y))\}$ $\qquad$ $\{R(f(f(f(a))), b)\}$ $\qquad$ $\{\neg R(y, g(g(z)))\}$

Aufgabe 6: Natürliches Schließen (15 Punkte)

Geben Sie eine formale Herleitung für

$$\forall x.\, \forall y.\, R(x,y) \vee R(y,x) \quad \vdash \quad \forall x.\, R(x,x)$$

im System natürlichen Schließens gemäß Vorlesung an. Dabei ist R ein zweistelliges Prädikat. *Achtung:* Es darf *nur* natürliches Schließen verwendet werden; *nicht* zulässig sind insbesondere Umformungen gemäß bekannter logischer Äquivalenzen (diese dürfen natürlich, wenn nötig, im System nachvollzogen werden, was sich aber meist eher nicht empfiehlt).

Aufgabe 7: Induktion (15 Punkte)

Sei $\Sigma = \{mult/2, suc/1\}$, und sei $\mathfrak{M}$ ein Σ-Modell, so dass $M = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, und für alle $x, y \in M$

$$\mathfrak{M}[\![mult]\!](x, y) = x * y \qquad \mathfrak{M}[\![suc]\!](x) = x + 1.$$

Zeigen Sie durch strukturelle Induktion über Terme, dass für jeden Term E mit $z \in \mathsf{FV}(E)$ und jede Valuation $\eta \colon V \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta \geq \eta(z)$$

Achtung: Selbstverständlich müssen alle Schritte vollständig durchgeführt werden.

Hinweis: Die Aufgabe ist als Induktionsbeweis gesehen absichtlich sehr einfach. Selbstverständlich müssen dennoch alle Schritte vollständig durchgeführt werden. Teil der Aufgabe ist unter anderem auch die Verwendung korrekter Notation für die Semantik der Logik erster Stufe, auf die also besonders geachtet werden sollte. Elementare Fakten über Arithmetik dürfen vorausgesetzt werden.