# GLoIn-Übungsblatt 13

T.CS

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2023/24) vom 25. Januar 2024
Tutorien vom 26.01. bis 01.02.; Abgabe bis **6. Februar 2024** (12:00 Uhr)

## Präsenzaufgabe P1 Resolution

Zeigen Sie mittels Resolution, dass folgende Klauselmengen unerfüllbar sind:
($\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{R}/2, a/0, f/1, g/2\}$)

(a) $\{\{\mathsf{P}(a)\},\ \ \{\neg\mathsf{P}(x), \neg\mathsf{R}(x,y), \mathsf{P}(y)\},\ \ \{\mathsf{R}(z, f(z))\},\ \ \{\neg\mathsf{P}(f(f(a)))\}\}$

(b) $\{\{\neg\mathsf{R}(g(x,y),y)\},\ \ \{\mathsf{R}(w, g(v,w))\},\ \ \{\mathsf{R}(r, g(s,t))\}\}$

## Präsenzaufgabe P2 Widerspruch per Resolution

Betrachten Sie die Signatur $\Sigma = \{\mathsf{D}/1, \mathsf{L}/2, \mathsf{P}/1, \mathsf{Q}/1, f/1, a/0\}$ und folgende Aussagen zu Ärzten und Quacksalbern:

$$\forall x.\neg\mathsf{D}(x) \lor \mathsf{L}(f(x), x) \qquad \forall x.\mathsf{P}(f(x)) \qquad \forall x,y.\neg\mathsf{Q}(y) \lor \neg\mathsf{P}(x) \lor \neg\mathsf{L}(x,y) \qquad \mathsf{D}(a)$$

Was ist $f(x)$?

Zeigen Sie per Resolution, dass die Aussagen im Widerspruch zu $\mathsf{Q}(a)$ stehen.

## Aufgabe A1 Resolution (10 Punkte)

Sei $\Sigma = \{\mathsf{S}/2, \mathsf{R}/2, \mathsf{P}/1, f/1, g/1, a/0\}$. Zeigen Sie mittels Resolution, dass die folgenden Klauselmengen unerfüllbar sind:

(a) $\{\{\neg\mathsf{S}(f(f(x)),x)\},\ \ \{\mathsf{S}(f(x),y), \mathsf{S}(y,z), \mathsf{P}(y)\},\ \ \{\neg\mathsf{P}(f(z))\}\}$. *3 Punkte*

(b) $\{\{\mathsf{R}(u, f(u))\},\ \ \{\mathsf{R}(g(v),v)\},\ \ \{\neg\mathsf{R}(x,y_1), \neg\mathsf{R}(x,y_2), \mathsf{R}(y_1,y_2)\},\ \ \{\neg\mathsf{R}(s,t), \neg\mathsf{R}(t,s)\}\}$ *4 Punkte*

(c) $\{\{\mathsf{S}(z,z)\}, \{\neg\mathsf{S}(x,y), \mathsf{S}(x,f(y))\}, \{\neg\mathsf{S}(a, f^{32}(a))\}\}$ *3 Punkte*
Hier (und nur hier) verwenden wir die Notation $f^k(x)$ als Kürzel für: $\underbrace{f(\dots f}_{k\text{-viele}}(x))$.
Verwenden Sie hier höchstens 10 Resolutionsschritte!

## Aufgabe A2 Ordnungen und Schranken (6 Punkte)

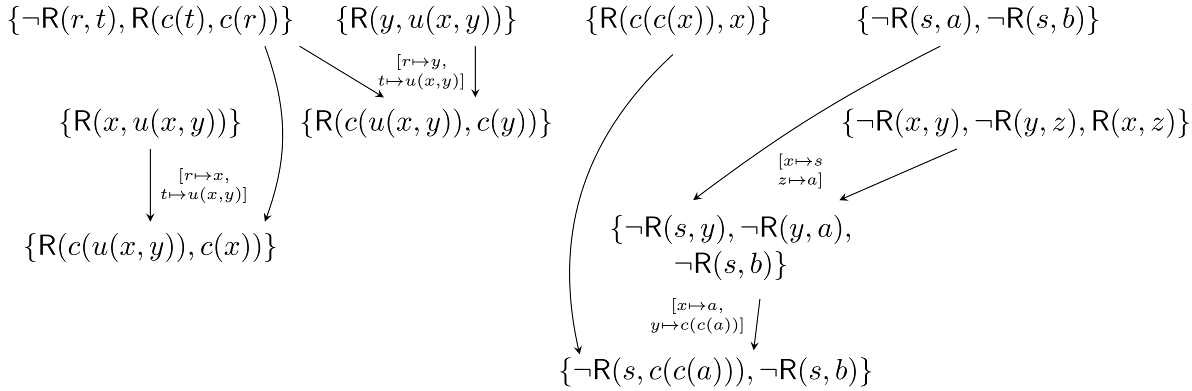
Wir betrachten Mengen mit einer Ordnungsrelation $\mathsf{R}$, die wir als „kleiner gleich“ oder „Teilmenge von“ verstehen: Die Relation erfüllt die Annahmen:

- Existenz einer oberen Schranke für je zwei gegebene Elemente:
$$\forall x,y.\mathsf{R}(x, u(x,y)) \tag{S1}$$
$$\forall x,y.\mathsf{R}(y, u(x,y)) \tag{S2}$$
- Existenz eines Komplements:
$$\forall r,t.\mathsf{R}(r,t) \to \mathsf{R}(c(t), c(r)) \tag{K1}$$
$$\forall x.\mathsf{R}(c(c(x)), x) \tag{K2}$$
- Transitivität: $$\forall x,y,z.\ \mathsf{R}(x,y) \land \mathsf{R}(y,z) \to \mathsf{R}(x,z) \tag{T}$$

Ein Beispiel finden Sie in der nächsten Aufgabe. Es gibt nun mehrere Methoden, um zu zeigen, dass auch untere Schranken existieren, wobei wir $\Sigma = \{\mathsf{R}/2, c/1, u/2, a/0, b/0\}$:

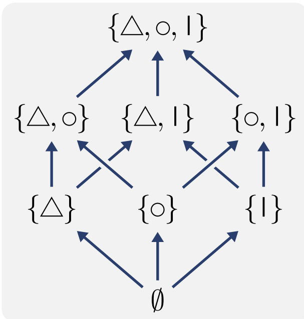
(a) Zeigen Sie $\forall x,y.\exists z.\ R(z,x) \land R(z,y)$ durch Ergänzung von `ordnung.v` *3 Punkte*

(b) Zeigen Sie per Resolution, dass die Annahmen im Widerspruch zu $\forall s.\neg R(s,a) \lor \neg R(s,b)$ stehen. Indem Sie folgenden Resolutionsbeweis vervollständigen: *3 Punkte*




## Aufgabe A3 Modell der Ordnungsaxiome (4 Punkte)

Für die Signatur $\Sigma = \{\mathsf{R}/2, c/1, u/2\}$ von Ordnungen ($\mathsf{R}$ ist Prädikatensymbol, $c$ und $u$ sind Funktionssymbole) definieren wir das Modell $\mathfrak{M}$, das durch die Teilmengen einer Menge $X$, also $M := \mathcal{P}(X)$, gegeben ist. Ein Beispiel für $X := \{\triangle, \circ, \mathsf{I}\}$ ist rechts dargestellt (der Übersichtlichkeit halber wurde auf Kanten verzichtet, die sich aus Transitivität ergeben).




- $\mathfrak{M}[\![\mathsf{R}]\!] \subseteq M \times M$, $\mathfrak{M}[\![\mathsf{R}]\!] = \subseteq$
- $\mathfrak{M}[\![c]\!] \colon M \to M$, $\mathfrak{M}[\![c]\!](S) = X \setminus S$
- $\mathfrak{M}[\![u]\!] \colon M \times M \to M$, $\mathfrak{M}[\![u]\!](S,T) = S \cup T$

Zeigen Sie per struktureller Induktion, dass für alle *Terme* $E \in T_\Sigma$ mit $\mathsf{FV}(E) = \{z\}$ gilt:

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta \quad \in \quad \{\emptyset,\ X,\ \eta(z),\ X \setminus \eta(z)\}$$

**Tipp:** Um Schreibarbeit zu sparen, definieren wir $\langle z \rangle := \{\emptyset, X, \eta(z), X \setminus \eta(z)\}$. Nutzen Sie, dass für alle $s \in \mathcal{P}(X)$ gilt: $X \cup s = X$, $\emptyset \cup s = s$, und verwenden Sie Tabellen für eventuelle Fallunterscheidungen.

**Hinweis:** Geben Sie wie immer die Induktionshypothesen und ihre Verwendung explizit an.