GLoIn-Übungsblatt 12

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2023/24) vom 18. Januar 2024
Tutorien vom 19.01. bis 25.01.; Abgabe bis **30. Januar 2024** (12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe P1 Unifikation

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen in der Signatur der Peano-Arithmetik ($\Sigma = \{+/2, 0/0, s/1\}$, Blatt 9, A4) unifizierbar sind, und, falls ja, einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen.

(a) $(x + 0) + (y + 0) \doteq x + s(x)$;

(b) $x + s(y) \doteq 0 + s(s(x))$.

Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel des Unifikationalgorithmus.

Was passiert, wenn man den Occurs-Check aus dem Unifikationsalgorithmus weglässt, d.h. (elim) auf $x \doteq E$ anwendet, ohne zu prüfen, ob $x \in \mathsf{FV}(E)$?

Aufgabe A1 Unifikation (11 Punkte)

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen in der Signatur der Gruppentheorie ($\Sigma = \{e/0, i/1, \circ/2\}$, Blatt 10, A2) unifizierbar sind. Falls ja, geben Sie einen allgemeinsten Unifikator an.

(a) $i(i(x)) \circ (x \circ y) \doteq i(y) \circ (x \circ i(e))$ *5 Punkte*

(b) $i(z \circ i(x)) \circ y \doteq y \circ i(z \circ e)$ *3 Punkte*

(c) $(x \circ y) \circ z \doteq x \circ (y \circ z)$ *3 Punkte*

Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel.

Aufgabe A2 Natürliches Schließen (5 Punkte)

In etlichen Programmiersprachen treten während des Kompilierens Unifkationsprobleme auf (u.a. während `apply` in Coq). Sei $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, f/1, g/3\}$ wobei P Relationssymbol ist und f, g Funktionssymbole sind. Beweisen Sie $\forall x.\, \forall y.\, \mathsf{P}(g(x, f(x), y)) \;\vdash\; \exists z.\, \exists w.\, \mathsf{P}(g(f(z), w, f(w)))$ indem Sie:

(a) einen Unifikator für $g(x, f(x), y) \doteq g(f(z), w, f(w))$ (wie in A1) berechnen … *3 Punkte*

(b) und anschließend mit diesem Wissen einen Fitch-Beweis führen. *2 Punkte*
Hinweis: ($\forall$E) eliminiert nur einen Allquantor!

Aufgabe A3 Induktion über Modelle (4 Punkte)

Wir betrachten Terme für $\Sigma = \{\mathsf{inc}/1, \mathsf{dec}/1\}$ – eine sehr einfache Programmiersprache, in der man nur inkrementieren und dekrementieren kann. Wir interpretieren diese Terme in einem Modell, das aus nur einem Zähler besteht. Konkret ist $\mathfrak{M}$ das Modell der ganzen Zahlen $M := \mathbb{Z}$ mit:

$$\mathfrak{M}[\![\mathsf{inc}]\!]\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad \mathfrak{M}[\![\mathsf{inc}]\!](n) = n + 1 \qquad \mathfrak{M}[\![\mathsf{dec}]\!]\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad \mathfrak{M}[\![\mathsf{dec}]\!](n) = n - 1$$

Zeigen Sie per struktureller Induktion, dass für alle Terme $E \in T_\Sigma$ mit $z \in \mathsf{FV}(E)$ ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = \eta(z) + k$ für alle $\eta\colon V \to \mathbb{Z}$.

Beispiel: Für $E := \mathsf{dec}(\mathsf{dec}(\mathsf{inc}(\mathsf{dec}(z))))$ hat $k := -2$ die gewünschte Eigenschaft.

Wie immer: Geben Sie die Induktionshypothesen und deren Verwendung explizit an.