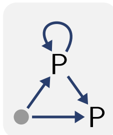
GLoIn-Übungsblatt 11

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2023/24) vom 11. Januar 2024
Tutorien vom 12.01. bis 18.01.; Abgabe bis **23. Januar 2024** (12:00 Uhr)

Für eine Signatur $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{R}/2\}$, die aus nur einem einstelligen Prädikat und einem zweistelligen Relationssymbol R besteht, visualisieren wir ein Modell $\mathfrak{M}$ graphisch:

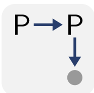
- Die Elemente des Trägers M von $\mathfrak{M}$ werden als (Knoten-)Punkte visualisiert.
- Die Paare in der Relation $\mathfrak{M}[\![\mathsf{R}]\!] \subseteq M^2$ werden als gerichtete Kanten visualisiert: für $(x, y) \in \mathfrak{M}[\![\mathsf{R}]\!]$ schreiben wir $x \longrightarrow y$
- Da in einem Modell die Namensgebung im Träger keine Rolle spielt, lassen wir die Namen der Knotenpunkte in der Visualisierung weg und unterscheiden lediglich ob sie P erfüllen: Elemente $x \in M$ mit $x \in \mathfrak{M}[\![\mathsf{P}]\!]$ visualisieren wir als P und alle übrigen Elemente ($x \notin \mathfrak{M}[\![\mathsf{P}]\!]$) als einfache Punkte ●. Damit erhalten wir zum Beispiel:

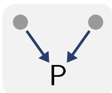
$$\begin{aligned} M &:= \{a, b, c\} \\ \mathfrak{M}[\![\mathsf{P}]\!] &:= \{b, c\} \\ \mathfrak{M}[\![\mathsf{R}]\!] &:= \{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\} \end{aligned} \qquad \hat{=}$$

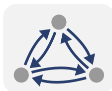
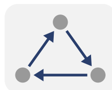


Präsenzaufgabe P1 Unterscheidbarkeit per FOL

Geben Sie für jedes der folgenden Paare von Modellen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ für $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{R}/2\}$ eine Formel ϕ an (mit $\mathsf{FV}(\phi) = \emptyset$), die in $\mathfrak{M}$ erfüllt wird ($\mathfrak{M} \models \phi$) aber nicht in $\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N} \not\models \phi$):

(a) $\mathfrak{M} :=$ 

$\mathfrak{N} :=$ 

(b) $\mathfrak{M} :=$  $\mathfrak{N} :=$ 

Präsenzaufgabe P2 Erfüllbarkeit

Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln ϕ für $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{R}/2\}$ erfüllbar sind, indem Sie graphisch ein Modell $\mathfrak{M}$ angeben, so dass $\mathfrak{M} \models \phi$.

(a) $(\forall x.\, \mathsf{P}(x) \to \exists y.\, \neg(x = y) \land \mathsf{R}(x, y)) \land \forall x.\, \mathsf{R}(x, x) \lor \mathsf{P}(x)$

(b) $(\exists x.\, \mathsf{P}(x)) \land (\exists x.\, \neg\mathsf{P}(x)) \land \forall x, y.\, \mathsf{R}(x, y)$

(c) $(\exists x, y.\, \mathsf{R}(x, y)) \land \forall x, y.\, \mathsf{R}(x, y) \leftrightarrow (\mathsf{P}(x) \leftrightarrow \neg\mathsf{P}(y))$

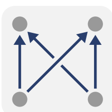
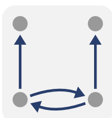
Aufgabe A1 Unterscheidbarkeit per FOL (6 Punkte)

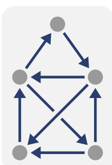
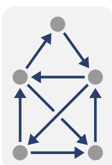
Geben Sie für jedes der folgenden Paare von Modellen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ für $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{R}/2\}$ eine Formel ϕ an (mit $\mathsf{FV}(\phi) = \emptyset$), die in $\mathfrak{M}$ erfüllt ist ($\mathfrak{M} \models \phi$) aber in $\mathfrak{N}$ nicht erfüllt ist ($\mathfrak{N} \not\models \phi$):

(a) $\mathfrak{M} :=$ 

$\mathfrak{N} :=$ 

2 Punkte

(b) $\mathfrak{M} :=$  $\mathfrak{N} :=$  *2 Punkte*

(c) $\mathfrak{M} :=$  $\mathfrak{N} :=$  (**Tipp:** Betrachten Sie Zyklen der Länge 3) *2 Punkte*

Aufgabe A2 Erfüllbarkeit (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln ϕ für $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{R}/2\}$ erfüllbar sind, indem Sie ein Modell $\mathfrak{M}$ angeben, so dass $\mathfrak{M} \models \phi$. Um das jeweilige Modell $\mathfrak{M}$ zu definieren, genügt es, die graphische Darstellung anzugeben (wie in vorigen Aufgaben).

(a) $(\forall x.\, \exists y.\, \mathsf{R}(x, y)) \quad \wedge \quad \neg(\exists y.\, \forall x.\, \mathsf{R}(x, y))$ *2 Punkte*

(b) $\forall y.\, \neg\mathsf{R}(y, y) \leftrightarrow \exists x.\, \mathsf{R}(x, y)$ *2 Punkte*

(c) $\forall k.\, \exists m, v.\, \mathsf{R}(k, m) \wedge \mathsf{R}(k, v) \wedge \neg(m = v)$ *2 Punkte*

Aufgabe A3 Es gibt genau ein . . . (4 Punkte)

Viele Existenzaussagen in der Mathematik betreffen nicht nur gewöhnliche Existenz, sondern *eindeutige* Existenz (z. B. existiert für jede natürliche Zahl eine *eindeutige* Primfaktorzerlegung). Die übliche Notation hierfür ist $\exists! x.\, \phi$: „Es gibt *genau ein* x, das ϕ erfüllt“. Grundsätzlich sind zwei Kodierungen von $\exists!$ in Prädikatenlogik denkbar:

(i) $\exists x.\, (\phi \wedge \forall y.\, \phi[y/x] \to x = y)$
(„Es gibt eines mit der Eigenschaft, dass jedes weitere gleich diesem sein muss“)

(ii) $(\exists x.\, \phi) \;\wedge\; (\forall x_1, x_2.\, \phi[x_1/x] \wedge \phi[x_2/x] \to x_1 = x_2)$
(„Zum einen gibt es mindestens eines, und zum anderen gibt es höchstens eins“)

Coq definiert `exists`! mittels (i). Zeigen Sie in Coq, dass die beiden Definitionen äquivalent sind, indem Sie `exists_uniq.v` vervollständigen.

Hinweis 1: Coq verwendet in der Definition von `exists`! eine Hilfsdefinition namens `unique`. Falls `unique` im Kontext erscheint, können Sie dies mittels `unfold unique in *` auffalten, um die prädikatenlogische Formel (wie in (i)) zu sehen.

Hinweis 2: Sie können Unterbeweise mittels `admit` auslassen, um sie später zu bearbeiten. Für die volle Punktzahl darf Ihre Abgabe kein `admit` mehr verwenden.

Tipp: Verwenden Sie `assert` an geeigneter Stelle.

Aufgabe A4 Induktion über Terme (4 Punkte)

Für die Signatur $\Sigma := \{\circ/2, e/0\}$ aus Funktionssymbolen $\circ$ und e seien zwei Modelle $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ auf demselben Träger $\mathbb{N}$ definiert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[\![e]\!] &:= 0 & \qquad \mathfrak{N}[\![e]\!] &:= 1 \\ \mathfrak{M}[\![\circ]\!](x, y) &:= \max(x, y) & \qquad \mathfrak{N}[\![\circ]\!](x, y) &:= x + y \end{aligned}$$

Zeigen Sie per struktureller Induktion über *Terme*, dass für alle Terme $E \in T_\Sigma$ und jede Belegung $\eta \colon V \to \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta \quad \le \quad \mathfrak{N}[\![E]\!]\eta$$

Beispiel: Für $\eta = [x \mapsto 3, y \mapsto 2]$ und $E = (e \circ x) \circ (x \circ y)$ gilt in der Tat: $\mathfrak{M}[\![E]\!]\eta = 3 \le 9 = \mathfrak{N}[\![E]\!]\eta$.

Hinweis: Nennen Sie die Induktionshypothesen und geben Sie stets an, wo Sie diese verwenden! Die induktiven Regeln für Terme (Definition 4.1 im Skript) geben Ihnen genau die zu betrachtenden Fälle des Induktionsbeweises (also die Induktionsanfänge/-schritte).