GLoIn-Übungsblatt 10

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2023/24) vom 21. Dezember 2023
Tutorien vom 22.12. bis 11.01.; Abgabe bis **16. Januar 2024** (12:00 Uhr)

Hinweis: Schauen Sie sich vor dem Bearbeiten der Coq-Aufgaben den neuen Abschnitt zu Prädikatenlogik in `gloin-coq-intro.pdf` an!

Präsenzaufgabe P1 Ärzte und Quacksalber

(a) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik unter Verwendung der Signatur $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{D}/1, \mathsf{Q}/1, \mathsf{L}/2\}$:

(i) "Jeder Arzt wird von mindestens einem Patienten gemocht";
(ii) "Kein Patient mag Quacksalber";
(iii) "Kein Arzt ist Quacksalber".

(b) Leiten Sie (in Fitch) die Formel (iii) aus den Formeln (i) und (ii) her.

(c) Formalisieren Sie ferner Ihren Beweis in Coq indem Sie `doctors.v` ergänzen.

Aufgabe A1 Natürliches Schließen (8 Punkte)

Zeigen Sie mittels natürlichen Schließens in Fitch:

(a) $\forall x.\ \mathsf{R}(x, x) \quad \vdash \quad \forall y. \exists z.\ R(z, y)$ *2 Punkte*

(b) $\forall a, b.\ \mathsf{R}(a, b) \to \mathsf{P}(a) \quad \vdash \quad \forall x. (\exists y. \mathsf{R}(x, y)) \to \mathsf{P}(x)$ *3 Punkte*

(c) $\{\forall b.\ R(a, b) \to Q(b),\ \exists d.\ R(a, d) \wedge P(d)\} \quad \vdash \quad \exists c.\ R(a, c) \wedge P(c) \wedge Q(c)$ *3 Punkte*

Aufgabe A2 Gruppentheorie (7 Punkte)

Gruppentheorie ist die Theorie erster Stufe über den Funktionssymbolen $e/0$ („neutrales Element"), $i/1$ („Inverses"), $\circ/2$ („Verknüpfung"; wobei wir $\circ$ infix schreiben), die mittels der folgenden Axiome definiert ist:

Ax1: $\forall x.\ e \circ x = x$;
Ax2: $\forall x.\ x \circ e = x$;
Ax3: $\forall x.\ i(x) \circ x = e$;
Ax4: $\forall x.\ \forall y.\ \forall z.\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

Der Anschaulichkeit halber sind hier ein paar Beispiele für Gruppen genannt:

- ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ ($e = 0$; $i(x) = -x$; $x \circ y = x + y$);
- positive rationale Zahlen $\mathbb{Q}_{>0}$ ($e = 1$; $i(x) = \frac{1}{x}$; $x \circ y = x \cdot y$).
- für eine beliebige Menge X, ist die Menge der bijektiven Abbildungen auf X eine Gruppe ($e =$ die Identitätsfunktion; $i =$ die Umkehrfunktion; $f \circ g =$ die Komposition $x \mapsto f(g(x))$)

Vorsicht: Gleichheit $=$ ist symmetrisch, $\circ$ jedoch nicht!

Unabhängig von diesen konkreten Beispielen, lassen sich etliche Eigenschaften bereits ganz allgemein für alle Gruppen zeigen:

(a) Zeigen Sie in Fitch, dass das neutrale Element eindeutig ist: $\forall f.\ (\forall x.\ f \circ x = x) \to f = e$. *3 Punkte*

(b) Zeigen Sie $i(i(x)) = x$ für alle x in Coq, indem Sie die `group.v` vervollständigen. *4 Punkte*

Aufgabe A3 Trinkerparadoxon (5 Punkte)

Das sogenannte *Trinkerparadoxon* behauptet von jeder Kneipe:
„Es gibt jemanden, so dass, wenn er trinkt, alle trinken“.

(a) Formalisieren Sie das Trinkerparadoxon in Logik erster Stufe für die Signatur bestehend aus dem Prädikat $\mathsf{T}/1$ für „trinkt“. *1 Punkt*

(b) Beweisen Sie es in Coq, indem Sie `trinker.v` ergänzen. *4 Punkte*
Hinweis: Sie dürfen ausschließlich die Taktiken verwenden, die in `gloin-coq-intro.pdf` eingeführt wurden!