GLoIn-Übungsblatt 9

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2023/24) vom 14. Dezember 2023
Tutorien vom 15.12. bis 21.12.; Abgabe bis **9. Januar 2024** (12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe P1 Prädikatenlogik

Wir lesen das zweistellige Prädikat $\mathsf{K}(x,y)$ als „x ist Kind von y". Formalisieren Sie folgende Aussagen in Prädikatenlogik:

(a) z hat ein Enkelkind. (Die gesuchte Formel hat also eine freie Variable; wie muss FV für $\exists$ definiert werden?)

(b) Jede:r hat genau zwei Elternteile.

(c) Es gibt nur Einzelkinder.

(d) Alle sind Geschwister.

Natürliche Sprache ist nicht so eindeutig wie sie scheint: finden Sie noch eine zweite (nichtäquivalente) Formalisierung von „Alle sind Geschwister"? Wie müsste man die natürlichsprachliche Aussage umformulieren, um nur eine der beiden Formalisierungen zuzulassen?

Hinweis: Wir verstehen *Geschwister* großzügig und beziehen auch Halbgeschwister mit ein.

Präsenzaufgabe P2 Freie Variablen

Berechnen Sie für die folgende Formel die Mengen der freien Variablen nach der rekursiven Definition aus der Vorlesung:

$$(\forall x.\, \mathsf{P}(x)) \wedge \exists y.\, y = \mathsf{f}(x,y).$$

Eigentlich hätte man zuerst die zu Grunde liegende Signatur angeben müssen. Können Sie sie trotzdem ablesen?

Präsenzaufgabe P3 Substitution

Werten Sie für die Signatur $\Sigma = \{\mathsf{R}/2, \mathsf{Q}/1, \mathsf{f}/2, \mathsf{c}/0\}$ folgende Substitution aus:

$$((\forall x.\, \mathsf{R}(x,y)) \wedge \mathsf{Q}(y))\,[\mathsf{c}/x, \mathsf{f}(x,y)/y, \mathsf{c}/z]$$

Aufgabe A1 Freie Variablen (2 Punkte)

Berechnen Sie für die Signatur $\Sigma = \{\mathsf{S}/2, \mathsf{P}/1\}$ die Menge der freien Variablen für folgende Formel (unter Beachtung von P1(a)):

$$(\forall x.\, \mathsf{S}(x,y)) \wedge ((\exists z.\, \mathsf{P}(z)) \to \forall y.\, \mathsf{S}(x,x))$$

Aufgabe A2 Substitution (6 Punkte)

(a) Leiten Sie die Gleichungen für die Subsitution für $\to$ und $\exists$ her, die sich aus deren üblichen Kodierungen mittels $\neg$, $\wedge$ und $\forall$ ergeben: *3 Punkte*

$$(\phi \vee \psi)\,\sigma = (\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi))\,\sigma = (\neg(\neg(\phi\,\sigma) \wedge \neg(\psi\,\sigma))) = (\phi\,\sigma) \vee (\psi\,\sigma) \qquad \text{(Beispiel)}$$
$$(\phi \to \psi)\,\sigma = \dots$$
$$(\exists x.\, \phi)\,\sigma = \dots$$

Hinweis: Bei letzterer Gleichung müssen Sie eine Nebenbedingung angeben und begründen, woraus sich diese Bedingung ergibt.

(b) Berechnen Sie die folgende Substitution für die Signatur $\Sigma = \{\mathsf{P}/1, \mathsf{S}/2, \mathsf{f}/2, \mathsf{g}/1\}$: *3 Punkte*

$$(\exists x.\, \mathsf{P}(z) \land \forall y.\, \mathsf{S}(x,y))\,[\mathsf{f}(x,y)/x, \mathsf{g}(y)/y, \mathsf{g}(x)/z].$$

Aufgabe A3 Formalisierung (5 Punkte)

In der aus einem binären Prädikat $\mathsf{K}/2$ und einem unären Funktionssymbol $\mathsf{c}/1$ bestehenden Signatur verstehen wir $\mathsf{K}(x,y)$ als „x ist Kind von y“ und $\mathsf{c}(x)$ als „Chef von x“. Formalisieren Sie unter Verwendung (ausschließlich) dieser Signatur folgende Aussagen in Prädikatenlogik:

(a) Kinder sind ihre eigenen Chefs. *1 Punkt*

(b) Chefs sind kinderlos. *1 Punkt*

(c) Es gibt nur einen Chef. *1 Punkt*

(d) Niemand ist Chef aller eigenen Enkel. *1 Punkt*

(e) Wenn jede:r des eigenen Chefs Chef ist, dann ist jede:r eines jeden Kind. *1 Punkt*

Aufgabe A4 Peano-Arithmetik (7 Punkte)

Peano-Arithmetik ist eine Formalisierung der natürlichen Zahlen in Logik erster Stufe (aus dem Jahr 1889!) über den Funktionssymbolen $+$ (Addition), $\times$ (Multiplikation), s (Nachfolger) und 0 (Null). Die unterliegende Signatur ist also $\Sigma = \{+/2, \times/2, \mathsf{s}/1, 0/0\}$. Zusätzliche Symbole dürfen nur in Form von Abkürzungen verwendet werden, z. B. $1 := \mathsf{s}(0)$ und $2 := \mathsf{s}(\mathsf{s}(0))$.

Formalisieren Sie folgende Aussagen in Peano-Arithmetik:

(a) n ist Primzahl. *1 Punkt*

(b) Quadratzahlen sind durch 3 teilbar. *2 Punkte*

(c) $n < m$; verwenden Sie hier weder Negation noch Implikation! *2 Punkte*
(Lediglich $\forall$, $\exists$, $\lor$, $\land$, $=$ und Terme sind erlaubt)

(d) Die Abbildung $n \mapsto n + 2$ (auf natürlichen Zahlen) ist injektiv. *2 Punkte*

Hinweis: Sie dürfen $+$ und $\times$ in der üblichen Infix-Notation verwenden, also $n+m$ statt $+(n,m)$. Es sind nur die Formalisierungen gefragt, nicht etwa Beweise (mindestens eine Aussage ist ja auch klarerweise nicht gültig).