GLoIn-Übungsblatt 8

T.CS

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2023/24) vom 7. Dezember 2023
Tutorien vom 08.12. bis 14.12.; Abgabe bis **19. Dezember 2023** (12:00 Uhr)

Präsenzaufgabe P1 Unit Propagation

Sei A ein Atom und ϕ eine Menge von Klauseln. Seien ϕ/A und $\phi/\neg A$ die im Korrektheitsbeweis definierten Klauselmengen. Wir führen folgende Optimierung des Resoutionsverfahrens ein:

Unit Propagation (UP): Wenn $\{A\} \in \phi$, dann ersetze die gesamte Klauselmenge ϕ durch ϕ/A. (und analog: wenn $\{\neg A\} \in \phi$, dann ersetze die gesamte Klauselmenge ϕ durch $\phi/\neg A$).

1. Zeigen Sie, dass UP korrekt ist, d. h. wenn $\{A\} \in \phi$, dann ist ϕ genau dann erfüllbar, wenn ϕ/A erfüllbar ist.
2. Überprüfen Sie unter Zuhilfenahme von Unit Propagation die Erfüllbarkeit der folgenden Klauselmenge:

$$\phi := \{\{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg B\}, \{\neg A, B, C\}, \{\neg A, B, \neg C\}, \{B, \neg C, D\}, \{C, D\}, \{B, \neg D\}\}$$

Aufgabe A1 Resolutionsprinzip falsch gemacht (3 Punkte)

Die folgende Resolutionsregel ist *inkorrekt*, d. h. ihre Konklusion ist im allgemeinen keine logische Konsequenz der Prämissen:

$$\frac{C \cup \{A, B\} \qquad D \cup \{\neg A, \neg B\}}{C \cup D} \text{ (falsch)}$$

Zeigen Sie die Inkorrektheit, indem Sie Klauseln C und D sowie eine Wahrheitsbelegung $\kappa\colon \mathscr{A} \to 2$ angeben, so dass κ die Prämissen der Regel erfüllt, aber nicht die Konklusion.

Aufgabe A2 Erfüllbarkeitsäquivalenz (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass es für jede Formel $\alpha \in \mathscr{F}$ mit $\mathsf{At}(\alpha) \neq \mathscr{A}$ eine Formel $\beta \in \mathscr{F}$ mit folgenden Eigenschaften gibt: *1 Punkt*

1. α und β sind erfüllbarkeitsäquivalent, d. h. α ist genau dann erfüllbar, wenn β erfüllbar ist; *2 Punkte*
2. α und β sind nicht logisch äquivalent, sofern α erfüllbar ist. *1 Punkt*

Hinweis: Man verwende ein Atom $A \in \mathscr{A} \setminus \mathsf{At}(\alpha)$.

Aufgabe A3 Korrektheit der Resolution (4 Punkte)

Hier beweisen wir ein paar Nebenbemerkungen im Korrektheitsbeweis der Resolution:

1. Zeigen Sie $A \wedge \phi \equiv A \wedge \phi/A$; beweisen Sie dazu zunächst $A \models (\phi \leftrightarrow \phi/A)$, wie im Skript behauptet. *3 Punkte*

   Hierbei identifizieren wir Klauselmengen implizit mit den entsprechenden Formeln in CNF.

   Tipp: Verwenden Sie, dass eine Klauselmenge von einer Wahrheitsbelegung genau dann erfüllt wird, wenn es in jeder Klausel ein Literal gibt, das erfüllt wird.

2. Zeigen Sie unter Verwendung der eben bewiesenen logischen Äquivalenz $A \wedge \phi \equiv A \wedge \phi/A$ und der hierzu analogen Äquivalenz $\neg A \wedge \phi \equiv \neg A \wedge \phi/\neg A$ (die Sie hier nicht gesondert beweisen müssen), dass ϕ logisch äquivalent ist zu *1 Punkt*

$$A \wedge \phi/A \quad \vee \quad \neg A \wedge \phi/\neg A.$$

Tipp: Sie können eine Kette von Äquivalenzumformungen verwenden.

Aufgabe A4 Resolution mit Unit Propagation (4 Punkte)

Überprüfen Sie die Erfüllbarkeit folgender Klauselmengen unter Zuhilfenahme der UP-Regel:

1. $\phi := \{\{P, W\}, \{\neg R, P\}, \{\neg P, W\}, \{P, Q, R\}, \{P, \neg Q, R\}, \{\neg P, \neg W, R\}, \{\neg P, \neg W, \neg R\}\}$ *2 Punkte*
2. $\phi := \{\{P, Q, W\}, \{P, \neg Q, R\}, \{P, \neg Q, \neg R\}, \{\neg P, R, W\}, \{\neg W, R\}, \{\neg W, Q\}, \{\neg W, \neg Q\}\}$ *2 Punkte*

Aufgabe A5 (2 Punkte)

Gilt die Äquivalenz

$$\Phi \not\models \psi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Phi \models \neg\psi$$

für beliebige $\Phi \subseteq \mathscr{F}$ und $\psi \in \mathscr{F}$? Begründen Sie Ihre Antwort (durch Angabe eines Beweises oder Gegenbeispiels).

Aufgabe A6 Logische Konsequenz (3 Punkte)

Zeigen Sie folgende logische Konsequenzen mittels Resolution.

1. $A \to B \lor C \models (A \to B) \lor (A \to C)$ *2 Punkte*
2. $\neg\neg\neg A \models \neg A$ *1 Punkt*

Hinweis: Schlagen Sie bei Bedarf die nötigen Zwischenschritte auf Übungsblatt 7 nach.