GLoIn-Übungsblatt 7

T.CS

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2023/24) vom 30. November 2023
Tutorien vom 01.12. bis 07.12.; Abgabe bis **11. Dezember 2023** (23:59 Uhr)

Präsenzaufgabe P1 Resolution

Entscheiden Sie per Resolution, ob die folgenden Klauselmengen erfüllbar sind:

1. $\{\{D, B, C\}, \{\neg D, B\}, \{\neg C, B, \neg A\}, \{\neg C, B, A\}, \{\neg B, \neg A\}, \{\neg B, A\}\}$
2. $\{\{\neg A, B, C\}, \{A, B\}, \{\neg C\}, \{\neg B, C\}\}$
3. $\{\{\neg A, B, C\}, \{A, B, C\}, \{A, \neg B, \neg C\}, \{A, B, \neg C\}\}$
4. $\emptyset$
5. $\{\emptyset\}$

Präsenzaufgabe P2 Normalformen

Bilden Sie NNF und CNF für die folgende aussagenlogische Formel:

$$\neg(A \to B) \land ((A \to (B \land C)) \to \neg C)$$

Aufgabe A1 Coq (3 Punkte)

Formalisieren Sie die folgende Aussage in Coq und beweisen Sie in Coq die formalisierte Aussage:

$$A \to B \lor C \quad \vdash \quad (A \to B) \lor (A \to C)$$

Aufgabe A2 Gültigkeit vs. $\top$ (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass eine Formel $\phi \in \mathscr{F}$ genau dann gültig ist, wenn $\phi \equiv \top$ gilt. Geben Sie dabei an, wo Sie welche Definition verwenden.

Aufgabe A3 Resolution (2 Punkte)

Zeigen Sie per Resolution, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist:

$$\{\{A, \neg B, C\}, \{\neg A, C, \neg D\}.\{A, B, D\}, \{A, B, \neg D\}, \{\neg A, \neg C\}, \{\neg A, C, D\}, \{A, \neg B, \neg C\}\}.$$

Aufgabe A4 Logische Folgerung durch Resolution (5 Punkte)

Beweisen Sie

$$\{\neg(B \land (\neg A \land \neg C)), \quad ((A \to C) \land B) \lor (C \land A)\} \quad \models \quad C$$

mittels Resolution. Verfahren Sie hierzu wie folgt:

1. Bilden Sie eine Formel ϕ, die offensichtlich unerfüllbar ist gdw. obige Folgerung wahr ist. *3 Punkte*
   Berechnen Sie von ϕ die NNF und anschließend die CNF.
2. Schreiben Sie diese als Klauselmenge und wenden Sie das Resolutionsverfahren darauf an. *2 Punkte*

Aufgabe A5 Monotonie (6 Punkte)

Informelle Erklärung. In einer Formel $\phi \in \mathscr{F}$ treten manche Atome $A \in \mathscr{A}$ unter „positivem“ und manche unter „negativem“ Vorzeichen auf. Für jede Formel $\phi \in \mathscr{F}'$ definieren wir $V(\top, \phi) \subseteq \mathscr{A}$ als diejenigen Atome, die positiv in ϕ vorkommen, und $V(\bot, \phi) \subseteq \mathscr{A}$ als diejenigen, die negativ in ϕ vorkommen. Wenn ein Atom ausschließlich positiv in einer Formel ϕ vorkommt und von einer Wahrheitsbelegung erfüllt wird, dann zeigen wir, dass ϕ auch dann noch erfüllt wird, wenn wir $A \mapsto \top$ in der Wahrheitsbelegung setzen.

Formale Aufgabenstellung. Sei $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$ die Menge der Formeln, die nur aus Atomen ($A \in \mathscr{A}$), $\bot$, $\wedge$ und $\neg$ aufgebaut sind. Wir definieren darauf die rekursive Funktion $V\colon 2 \times \mathscr{F}' \to \mathcal{P}(\mathscr{A})$:

$$\begin{aligned} V(s, \bot) &= \emptyset & V(\top, A) &= \{A\} & V(\bot, A) &= \emptyset \quad \text{für } A \in \mathscr{A} \\ V(s, \alpha \wedge \beta) &= V(s, \alpha) \cup V(s, \beta) & V(\top, \neg\phi) &= V(\bot, \phi) & V(\bot, \neg\phi) &= V(\top, \phi). \end{aligned}$$

Für eine Menge $S \subseteq \mathscr{A}$ und Wahrheitsbelegungen $\kappa, \sigma\colon \mathscr{A} \to 2$ schreiben wir $\kappa \leq_S \sigma$, wenn Folgendes gilt:

$$\text{Für alle } A \in S \text{ folgt aus } \kappa(A) = \top \text{ auch } \sigma(A) = \top.$$

Beweisen Sie Folgendes für alle $\phi \in \mathscr{F}'$ per struktureller Induktion:

$$\text{Für alle } \kappa, \sigma\colon \mathscr{A} \to 2 \text{ mit } \kappa \leq_{V(\top,\phi)} \sigma \text{ und } \sigma \leq_{V(\bot,\phi)} \kappa \text{ gilt} \quad \kappa \models \phi \implies \sigma \models \phi.$$