GLoIn-Übungsblatt 6

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2023/24) vom 23. November 2023
Tutorien vom 24.11. bis 30.11.; Abgabe bis **4. Dezember 2023** (23:59 Uhr)

Hinweis: Lesen Sie sich im aktualisierten Coq-Intro (`gloin-coq-intro.pdf`) den neuen Abschnitt zu `assert` und `apply as in` durch.

Äquivalenzbeweise

Um die Äquivalenz zweier Aussagen A und B zu beweisen, zeigt man, dass aus A B folgt und dass aus B auch A folgt. In den Systemen, die wir kennen, bedeutet dies Folgendes:

- In mathematischen Beweisen „auf Papier" besteht ein Beweis von $A \iff B$ aus zwei Teilen: einem Beweis von $A \implies B$ und einem Beweis von $B \implies A$.
- In natürlichem Schließen verstehen wir $A \leftrightarrow B$ als Notation für $(A \to B) \land (B \to A)$.
- In Coq schreibt man `A <-> B`, was definiert ist als `(A -> B) /\(B -> A)`. Man beweist eine Äquivalenz in Coq also durch die Taktik `split`, gefolgt von zwei Unterbeweisen, einem für `A -> B` und einem für `B -> A`.

Präsenzaufgabe P1

Leiten Sie die folgenden Aussagen durch natürliches Schließen her, formalisieren Sie sie in Coq und beweisen Sie sie dort anschließend.

1. $\vdash \bot \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg A)$
   (Tipp: `assert (~A) as na`.)
2. $(A \to C) \lor (B \to C) \quad \vdash \quad A \land B \to C$
3. $A \lor (A \to B) \to (A \to B) \lor B \quad \vdash \quad A \to B$
   (Tipp: `assert (A ∨ (A → B)) as H`.)

Präsenzaufgabe P2

Der Einfachheit halber sei $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$ die Menge der Formeln, die nur aus Atomen ($A \in \mathscr{A}$), $\bot$, $\top$, $\land$ und $\neg$ aufgebaut sind. Wir definieren die Ersetzungsfunktion $R\colon \mathscr{A} \times 2 \times \mathscr{F}' \to \mathscr{F}'$ (R wie *replace*), die ein Atom durch eine Konstante aus $2 = \{\top, \bot\}$ ersetzt:

$$R(A,c,B) = \begin{cases} c & \text{falls } A = B \\ B & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } B \in \mathscr{A} \qquad R(A,c,\neg\psi) = \neg R(A,c,\psi)$$

$$R(A,c,\bot) = \bot \quad R(A,c,\top) = \top \qquad R(A,c,\alpha \land \beta) = R(A,c,\alpha) \land R(A,c,\beta)$$

Zeigen Sie per struktureller Induktion, dass $\kappa \models \phi$ genau dann gilt, wenn $\kappa \models R(A, \kappa(A), \phi)$.

Aufgabe A1 Natürliches Schließen (4 Punkte)

Leiten Sie folgende Aussagen durch natürliches Schließen her:

1. $A \lor B \to C \quad \vdash \quad (A \to C) \land (B \to C)$ *2 Punkte*
2. $(A \land B) \lor (C \land D) \quad \vdash \quad (A \lor C) \land (B \lor D)$ *2 Punkte*

Aufgabe A2 Coq (6 Punkte)

Formalisieren Sie die folgenden Aussagen in Coq und beweisen Sie diese anschließend.

1. $A \lor B \to C \quad \vdash \quad (A \to C) \land (B \to C)$ *3 Punkte*
2. $(A \lor B) \to (A \land B) \quad \vdash \quad A \leftrightarrow B$ *3 Punkte*
   (Tipp: `assert (A∨ B) as aob`. an geeigneter Stelle)

Aufgabe A3 (4 Punkte)

Betrachten Sie $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$ und die Ersetzungsfunktion $R\colon \mathscr{A} \times 2 \times \mathscr{F}' \to \mathscr{F}'$ von oben. Zeigen Sie per struktureller Induktion, dass für alle $A \in \mathscr{A}$, $c \in 2$ und $\phi \in \mathscr{F}'$ gilt: $\mathsf{At}(R(A, c, \phi)) = \mathsf{At}(\phi) \setminus \{A\}$.

Geben Sie explizit die Induktionshypothese(n) und der Stelle ihrer Verwendung an.

Aufgabe A4 (6 Punkte)

Auf Blatt 3 wurde die Funktion $L\colon (\mathscr{A} \to 2) \to \mathcal{P}(\mathscr{F})$ durch $L(\kappa) = \{\phi \in \mathscr{F} \mid \kappa \models \phi\}$ definiert. Beweisen Sie: für alle $\kappa\colon \mathscr{A} \to 2$ ist $L(\kappa)$ maximal konsistent.