GLoIn-Übungsblatt 5

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2023/24) vom 16. November 2023
Tutorien vom 17.11. bis 23.11.; Abgabe bis **27. November 2023** (23:59 Uhr)

Auf der Veranstaltungswebseite finden Sie eine Einführung in Coq, in der Sie alles zu Coq nachschlagen können, das für die Aufgaben nötig ist.

Präsenzaufgabe P1 Coq

Beweisen Sie die folgenden Aussagen in Coq, indem Sie `gloin_blatt_05_p1.v` vervollständigen:

1. $\{A \to B,\ B \to C\} \ \vdash \ A \to C$
2. $\neg A \ \vdash \ A \to \bot$
3. $A \wedge B \ \vdash \ C \to A$
4. $A \wedge B \to C \ \vdash \ A \to B \to C$
5. $B \vee \neg B \ \vdash \ (A \to B) \vee (B \to C)$
6. $\neg B \to \neg A \ \vdash \ A \to B$

Aufgabe A1 Coq (10 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen in Coq, indem Sie `gloin_blatt_05_a1.v` vervollständigen:

1. $\{A \vee B, A \to B\} \ \vdash \ B$ *2 Punkte*
2. $A \to B \to C \ \vdash \ A \wedge B \to C$ *2 Punkte*
3. $\neg(A \vee B) \ \vdash \ \neg A \wedge \neg B$ *2 Punkte*
4. $\vdash \ A \vee \neg A$ *2 Punkte*
5. $\neg A \vee \neg B \vee \neg C \ \vdash \ \neg(A \wedge B \wedge C)$ *2 Punkte*

Aufgabe A2 Intuitionismus (10 Punkte)

Eine Herleitung im Kalkül des natürlichen Schließens heißt *intuitionistisch* (oder auch *konstruktiv*), wenn in ihr nicht die Regel ($\neg$E) verwendet wird. Wir schreiben $\phi \vdash_{\mathsf{int}} \phi$ wenn sich ψ aus ϕ intuitionistisch herleiten lässt. Doch warum sollte man ($\neg$E) vermeiden wollen? Weil Beweisassistenten wie Coq intern mit dem Curry-Howard-Isomorphismus arbeiten, der besagt:

Intutionistische Beweise *sind* Programme!

Details wie die dazu gehörige Programmiersprache lernen Sie in *Theorie der Programmierung* kennen. Für die aktuelle Aufgabe genügt es, auf ($\neg$E) zu verzichten. Beginnen wir mit ein paar Beispielen:

1. Zeigen Sie $\neg\neg A \wedge \neg\neg B \ \vdash_{\mathsf{int}} \ \neg\neg(A \wedge B)$ (also ohne ($\neg$E)). *2 Punkte*
2. Zeigen Sie $A \wedge B \ \vdash_{\mathsf{int}} \ \neg(\neg A \vee \neg B)$ *2 Punkte*
3. Zeigen Sie $\vdash_{\mathsf{int}} \ \neg\neg\neg A \to \neg A$ *2 Punkte*

Andererseits ist z. B. $A \vee \neg A$ nicht intuitionistisch beweisbar (versuchen Sie es nicht). Ebenso ist das *Gesetz von Peirce* $((A \to B) \to A) \to A$ nicht intuitionistisch herleitbar. Wir zeigen aber im folgenden, dass es intuitionistisch äquivalent zu ($\neg$E) ist:

4. Zeigen Sie $\neg\neg A \to A \ \vdash_{\mathsf{int}} \ ((A \to B) \to A) \to A$. *2 Punkte*
5. Wir erweitern unser Kalkül des natürlichen Schließens vorübergehend um folgende Regel: *2 Punkte*

$$\frac{(\alpha \to \beta) \to \alpha}{\alpha} \ \text{(Pierce)}$$

Leiten Sie $\neg\neg A \to A$ unter Verwendung von (Pierce) aber ohne ($\neg$E) her.