# GLoIn-Übungsblatt 4

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2023/24) vom 9. November 2023
Tutorien vom 10.11. bis 16.11.; Abgabe bis **20. November 2023** (23:59 Uhr)

## Präsenzaufgabe P1

Beweisen Sie mittels natürlichen Schließens:

1. $\{A \to B,\ B \to C\} \quad \vdash \quad A \to C$
2. $\neg A \quad \vdash \quad A \to \bot$
3. $A \wedge B \quad \vdash \quad C \to A$
4. $A \wedge B \to C \quad \vdash \quad A \to B \to C$
5. $B \vee \neg B \quad \vdash \quad (A \to B) \vee (B \to C)$
6. $\neg B \to \neg A \quad \vdash \quad A \to B$

**Hinweis:** Nutzen Sie ausschließlich natürliches Schließen unter Verwendung der Regeln für $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\bot$, $\to$. Das Umformen anhand logischer Äquivalenzen ist nicht zulässig!

## Präsenzaufgabe P2

Das Prinzip der **strukturellen Induktion für aussagenlogische Formeln** lautet: um zu zeigen, dass eine Eigenschaft $P$ für alle aussagenlogischen Formeln $\phi$ gilt, zeige:

1. *Induktionsanfang*: $P$ gilt für $\phi = \bot$ und $\phi = \top$ sowie für alle atomaren $\phi \in \mathcal{A}$;
2. *Induktionsschritt*: wenn $P$ für Formeln $\phi$ und $\psi$ gilt (*Induktionshypothesen*), dann auch jeweils für $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$ und $\neg\phi$.

Wir definieren $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$ als die Teilmenge der aussagenlogischen Formeln, die nur aus Atomen ($A \in \mathscr{A}$), $\top$, $\bot$ und $\wedge$ aufgebaut sind. Sei $\kappa\colon \mathscr{A} \to 2$ eine Wahrheitsbelegung und sei $A \in \mathscr{A}$ mit $\kappa(A) = \bot$. Beweisen Sie mittels des obigen Induktionsprinzips: für alle $\phi \in \mathscr{F}'$ mit $A \in \mathsf{At}(\phi)$ folgt $\kappa \not\models \phi$.

## Aufgabe A1 (4 Punkte)

Wir definieren den Kirsch-Bananen-Kalkül durch die Regeln (i) bis (iv):

$$\frac{}{\text{🍒}}\ \text{(i)} \qquad \frac{X}{\text{🍌}X}\ \text{(ii)} \qquad \frac{X\text{🍌} \qquad \text{🍌}Y}{XY}\ \text{(iii)} \qquad \frac{X}{\text{🍒}X\text{🍌}}\ \text{(iv)}$$

Dabei sind $X$ und $Y$ **nichtleere** Zeichenketten, die aus 🍒 und 🍌 bestehen.

1. Überprüfen Sie, ob die folgenden Zeichenketten im Kirsch-Bananen-Kalkül herleitbar sind:
   (a) 🍒🍌🍒🍌 *1 Punkt*
   (b) 🍒🍒🍒 *1 Punkt*
   (c) 🍌🍌🍌 *1 Punkt*

2. Überprüfen Sie, ob die Regel $\dfrac{X}{\text{🍒🍒}X}$ im Kirsch-Bananen-Kalkül herleitbar sind. *1 Punkt*

**Hinweis:** In beiden Fällen heißt „Überprüfen“, dass Sie im positiven Fall eine Herleitung explizit angeben und im negativen Fall zeigen, dass keine Herleitung existiert. Geben Sie unbedingt an, wo Sie welche Regel verwenden!

**Tipp:** Bei handschriftlicher Abgabe empfiehlt es sich, $K$ statt 🍒 und $B$ statt 🍌 zu schreiben.

## Aufgabe A2 (11 Punkte)

Beweisen Sie mittels natürlichen Schließens:

1. $\{A \vee B, A \to B\} \quad \vdash \quad B$ *2 Punkte*
2. $A \to B \to C \quad \vdash \quad A \wedge B \to C$ *2 Punkte*
3. $(A \to B) \to C \quad \vdash \quad A \to (B \to C)$ *2 Punkte*
4. $\neg(A \vee B) \quad \vdash \quad \neg A \wedge \neg B$ *2 Punkte*
5. $\vdash \quad A \vee \neg A$ *3 Punkte*

**Hinweis:** Nutzen Sie ausschließlich natürliches Schließen unter Verwendung der Regeln für $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\bot$, $\to$. Das Umformen anhand logischer Äquivalenzen ist nicht zulässig!

## Aufgabe A3 (5 Punkte)

Wir definieren $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$ als die Teilmenge der aussagenlogischen Formeln, die nur aus Atomen ($A \in \mathscr{A}$), $\bot$ und $\vee$ aufgebaut sind. Sei $\kappa \colon \mathscr{A} \to 2$ eine Wahrheitsbelegung. Beweisen Sie mittels obigen Prinzips der strukturellen Induktion, dass es für alle $\phi \in \mathscr{F}'$ mit $\kappa \models \phi$ ein $A \in \mathscr{A}$ mit $\kappa(A) = \top$ gibt.

**Hinweis:** Geben Sie im Induktionsschritt explizit die Induktionshypothesen und deren Verwendung an.