GLoIn-Übungsblatt 3

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2023/24) vom 2. November 2023
Tutorien vom 03.11. bis 09.11.; Abgabe bis **13. November 2023** (23:59 Uhr)

Hinweise und Definitionen

Zu jeder Menge X gibt es eine *Potenzmenge* $\mathcal{P}(X)$, die genau aus den Teilmengen von X besteht, formal:

$$\forall S. \quad S \in \mathcal{P}(X) \quad \Longleftrightarrow \quad S \subseteq X$$

Grundsätzlich gilt, dass zwei Mengen R, T genau dann gleich sind ($R = T$), wenn sie die gleichen Elemente haben, also:

$$R = T \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\forall r \in R.\, r \in T \quad \text{und} \quad \forall t \in T.\, t \in R)$$

Daraus ergibt sich:

- Zwei Funktionen $f, g\colon X \to Y$ sind genau dann gleich ($f = g$), wenn für alle $x \in X$ die Aussage $f(x) = g(x)$ gilt.
- Zwei Teilmengen $S, S' \subseteq X$ sind genau dann gleich, wenn für alle $x \in X$ die Aussage $x \in S \Leftrightarrow x \in S'$ gilt.

Präsenzaufgabe P1

Für eine *endliche* Menge $\mathscr{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, von Atomen sei eine Wahrheitsbelegung $\kappa\colon \mathscr{A} \to 2$ gegeben. Definieren Sie eine Formel $\phi \in \mathscr{F}$, sodass für alle $\sigma\colon \mathscr{A} \to 2$ gilt:

$$\sigma \models \phi \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \kappa = \sigma.$$

Präsenzaufgabe P2

Zeigen Sie folgende Aussagen per Wahrheitstafel:

1. $A \wedge B \quad \models \quad C \to A$
2. $(A \leftrightarrow \neg B) \wedge (A \wedge B)$ ist unerfüllbar.

Aufgabe A1 (4 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussagen per Wahrheitstafel:

1. $\neg A \vee \neg B \quad \models \quad A \wedge B \to C$ *2 Punkte*
2. $\neg(A \to \neg B) \quad \models \quad B$ *2 Punkte*

Aufgabe A2 (5 Punkte)

Wir definieren eine Funktion L, die jeder Wahrheitsbelegung κ die Menge der Formeln zuordnet, die von κ erfüllt werden:

$$L\colon (\mathscr{A} \to 2) \to \mathcal{P}(\mathscr{F}) \qquad L(\kappa) = \{\phi \in \mathscr{F} \mid \kappa \models \phi\}$$

Beweisen Sie für alle Mengen $\mathscr{A}$:

1. L ist injektiv. *3 Punkte*
2. L ist nicht surjektiv. *2 Punkte*

Hinweis: Beide Teilaufgaben müssen für beliebiges $\mathscr{A}$ korrekt sein, also unabhängig davon ob $\mathscr{A}$ endlich, unendlich, etc. ist. Nutzen Sie die Hinweise zur Gleichheit von Funktionen und Mengen (siehe Beginn dieses Übungsblatts).
Hinweis: Die Definition von injektiv bzw. surjektiv sind auf den vorherigen Übungsblättern sowie im Anhang A des Skripts zu finden.

Aufgabe A3 (5 Punkte)

Definieren Sie eine rekursive Funktion $T\colon \mathscr{F} \to \mathcal{P}(\mathscr{F})$, die jeder Formel die Menge all ihrer *echten* Teilformeln zuordnet. Für jedes $\phi \in \mathscr{F}$ soll $T(\phi) \subseteq \mathscr{F}$ also genau die Formeln enthalten, die verschachtelt in ϕ zu finden sind; „echt" bedeutet hier, dass ϕ selbst nicht als echte Teilformel gilt, d.h. $\phi \notin T(\phi)$. Wir gehen hier davon aus, dass die Formel neben Atomen nur aus $\neg$, $\wedge$, $\bot$ aufgebaut ist, indem alle anderen Konnektiven mittels $\neg, \wedge, \bot$ ausgedrückt wurden. Für die Definition von T müssen Sie also lediglich die folgenden Fälle vervollständigen:

$$T(A) = \underline{\hspace{4cm}} \text{ (für } A \in \mathscr{A}) \qquad T(\bot) = \underline{\hspace{4cm}}$$
$$T(\neg\phi) = \underline{\hspace{4cm}} \qquad T(\phi \wedge \psi) = \underline{\hspace{4cm}}$$ *4 Punkte*

Überprüfen Sie Ihre Definition anhand dieses Beispiels:

$$T(A \wedge (\neg B \wedge A)) = \{A, B, \neg B, (\neg B \wedge A)\}$$ *1 Punkt*

Aufgabe A4 (6 Punkte)

Für $A \in \mathscr{A}$ definieren wir die Funktion $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathscr{F}$:

$$\phi(0) \;=\; A \to B \qquad \phi(k+1) \;=\; \phi(k) \to A$$

Zeigen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel $\phi(2 \cdot n + 2)$ gültig ist:

1. Verifizieren Sie den Basisfall (z. B. per Wahrheitstafel) *1 Punkt*
2. Verifizieren Sie den Induktionsschritt; geben Sie explizit die Induktionshypothese an und markieren Sie, wo Sie diese verwenden. *3 Punkte*

Ist $\phi(2 \cdot n + 1)$ (für $n \in \mathbb{N}$) erfüllbar, gültig bzw. unerfüllbar? Begründen Sie Ihre Aussage. *2 Punkte*

Hinweis: $0 \in \mathbb{N}$