GLoIn-Übungsblatt 2

Zur Vorlesung *Grundlagen der Logik in der Informatik* (WS 2023/24) vom 26. Oktober 2023
Tutorien vom 27.10. bis 02.11.; Abgabe bis **6. November 2023** (23:59 Uhr)

Beachten Sie unbedingt die *Hinweise zum Lösen der Übungsblätter* auf der Veranstaltungs-Webseite!

Präsenzaufgabe P1

Gegeben sei die Funktion $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$s(0) = 0 \qquad s(n+1) = s(n) + n + 1.$$

Beweisen Sie $s(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ per Induktion.

Präsenzaufgabe P2

In der Vorlesung haben wir die Fibonacci-Folge $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv definiert:

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = 1 \qquad f(n) = f(n-1) + f(n-2) \text{ für } n \geq 2 \tag{G1}$$

Beweisen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, mit $n \geq 1$, gilt:

$$f(n+1) \cdot f(n-1) - f(n)^2 = (-1)^n$$

Präsenzaufgabe P3

Sei $\mathscr{A} = \{A, B, C\}$. Definieren Sie für jede der folgenden Formeln ϕ eine Wahrheitsbelegung $\kappa\colon \mathscr{A} \to 2$, sodass $\kappa \models \phi$.

1. $(\neg B \to \neg A) \land C$
2. $(A \to B \land \neg C) \land (A \lor \neg B)$
3. $(\neg A \to \top \to C) \land \neg C$
4. $A \land C \lor B \land \neg B$

Aufgabe A1 (5 Punkte)

Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt *surjektiv*, wenn es für jedes $b \in B$ (mindestens) ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ gibt.

Gegeben seien Funktionen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ und deren Verknüpfung $h\colon A \to C$, definiert durch $h(x) = g(f(x))$. Beweisen Sie:

1. Wenn f und g surjektiv sind, dann ist h surjektiv. *2 Punkte*
2. Wenn h surjektiv ist, dann ist g surjektiv. *2 Punkte*
3. Finden Sie ein Beispiel, in dem h surjektiv ist, aber f nicht. *1 Punkt*

Aufgabe A2 (4 Punkte)

Sei $\mathscr{A} = \{A, B, C\}$. Definieren Sie für jede der folgenden Formeln ϕ eine Wahrheitsbelegung $\kappa\colon \mathscr{A} \to 2$ sodass $\kappa \models \phi$.

1. $((A \to B) \to A) \land C$
2. $((A \to B) \to A) \to \bot$
3. $(C \lor B) \land \neg(A \lor B)$
4. $(A \to B) \land \neg(B \to A)$

Aufgabe A3 (4 Punkte)

Sei $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$q(0) = 0 \qquad q(n+1) = q(n) + 2 \cdot n + 1.$$

Beweisen Sie per Induktion, dass $q(n) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie explizit Induktionsanfang und -schritt an; nennen Sie im Induktionsschritt explizit die Induktionshypothese und markieren Sie, wo Sie diese verwenden.

Aufgabe A4 (5 Punkte)

Wir betrachten noch einmal die Fibonacci-Folge $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (wie in (G1) definiert) und zeigen deren Beziehung zum *goldenen Schnitt* $s := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. Zusammen mit $t := 1 - s \approx -0.618$ bilden s und t die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$x^2 = x + 1 \qquad (x \text{ aus } \mathbb{R}). \tag{G2}$$

Beweisen Sie

$$f(n) = \frac{s^n - t^n}{\sqrt{5}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{G3}$$

mittels Induktion und zwei Basisfällen, also konkret:

1 Punkt
1. *Induktionsanfang:* Zeigen Sie, dass (G3) für $n = 0$ gilt.

1 Punkt
2. *Induktionsanfang:* Zeigen Sie, dass (G3) für $n = 1$ gilt.

3 Punkte
3. *Induktionsschritt:* Zeigen Sie für alle $n \geq 2$, dass wenn (G3) für $n-2$ sowie für $n-1$ gilt („Induktionshypothesen"), dann gilt (G3) auch für n.

   Geben Sie die Induktionshypothesen für $n-2$ und $n-1$ explizit an und vermerken Sie in Ihrer Herleitung, wo Sie (G1), (G2) und die Induktionshypothesen verwenden!

Aufgabe A5 (2 Punkte)

Definition. Eine Formel ϕ heißt *gültig*, wenn sie von allen Wahrheitsbelegungen $\kappa\colon \mathscr{A} \to 2$ erfüllt wird ($\kappa \models \phi$); sie heißt *erfüllbar*, wenn es eine Wahrheitsbelegung $\kappa\colon \mathscr{A} \to 2$ gibt, die ϕ erfüllt ($\kappa \models \phi$).

Beweisen Sie für eine allgemeine Menge von Atomen $\mathscr{A}$, dass jede gültige Formel ϕ erfüllbar ist.