Übungsblatt 12

Abgabe der Lösungen: Mo. 06.02, 12:00

Aufgabe 1 Natürliche vs. reelle Zahlen (Präsenzaufgabe)

Wir betrachten erneut Peano-Arithmetik (erste Stufe), wie in Aufgabe 5, Übungsblatt 9, nun zusammen mit den entsprechenden Axiomen:

PA_1: $\forall x.\, \neg(0 = s(x))$

PA_2: $\forall x, y.\, s(x) = s(y) \to x = y$

PA_3: $\forall x.\, x + 0 = x$

PA_4: $\forall x, y.\, x + s(y) = s(x + y)$

PA_5: $\forall x.\, x \times 0 = 0$

PA_6: $\forall x, y.\, x \times s(y) = x \times y + x$

PA_7: $\forall y_1, \ldots, y_n.$

$$\phi(0, y_1, \ldots, y_n) \wedge \big(\forall x.\, \phi(x, y_1, \ldots, y_n) \to \phi(s(x), y_1, \ldots, y_n)\big) \to \forall x.\, \phi(x, y_1, \ldots, y_n),$$

wobei ϕ eine beliebige Formel ist.

Das letzte Axiom ist in Wirklichkeit ein *Axiomenschema*, das für jedes ϕ ein Axiom erzeugt, eine sogenannte *Instanz*. Diese Instanzen heißen erwartungsgemäß *Induktionsaxiome*. Die schematische Formulierung ist eine Annäherung an das eigentlich beabsichtigte Induktionsprinzip, das über eine Prädikaten*variable* P anstelle von ϕ redet, aber in Prädikatenlogik erster Stufe nicht ausdrückbar ist.

Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind dann bekanntermaßen ein *Standardmodell* der Peano-Arithmetik unter den folgenden Definitionen:

- $\mathbb{N}[\![0]\!] = 0$;
- $\mathbb{N}[\![s]\!](x) = x + 1$;
- $\mathbb{N}[\![+]\!](x, y) = x + y$;
- $\mathbb{N}[\![\times]\!](x, y) = x \times y$.

Das heißt, die obige Formeln PA_1–PA_7 werden in Bezug auf $\mathbb{N}$ erfühlt.

Beweisen Sie, dass die *nicht-negativen reellen Zahlen* $\mathbb{R}^+$ unter den gleichen Interpretationen von 0, s, $+$ und $\times$ (d.h. $s(x) = x + 1$, $+$ wird als Addition, $\times$ als Multiplikation und 0 als 0 interpretiert) **kein** Modell der Peano-Arithmetik sind. Finden Sie dazu ein Peano-Axiom, das über $\mathbb{R}^+$ nicht gilt.

Aufgabe 2 Modellbau für Peano-Arithmetik (Präsenzaufgabe)

Da alle Axiome der Peano-Arithmetik über $\mathbb{N}$ gelten, ist die Peano-Arithmetik korrekt über natürlichen Zahlen; d.h. $\mathbb{N} \models \phi$ gilt für jedes Theorem ϕ der Peano-Arithmetik, d.h. für alle durch natürliches Schließen aus den Peano-Axiomen herleitbaren Formeln ϕ. Die Peano-Arithmetik ist dennoch *nicht* vollständig über $\mathbb{N}$; d.h. es gibt Formeln, die über $\mathbb{N}$ gültig, aber keine Theoreme der Peano-Arithmetik sind. Dies ist eine Konsequenz des berühmten ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes und hat unter anderem zur Folge, dass es strukturell andere Modelle als $\mathbb{N}$ gibt ("strukturell anders" in einem formal präzisen Sinn), die alle Peano-Axiome erfüllen. Solche Modelle werden auch *Nichtstandardmodelle* genannt. Man meint intuitiv, solche Modelle auf recht naive Weise konstruieren zu können, was aber fehlschlägt, wie die folgenden Versuche zeigen:

(a) Erweitern Sie das Modell $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, indem Sie die Semantik von Funktionssymbolen dahingehend vervollständigen, dass ∞ als Ergebnis ausgegeben wird, sobald mindestens ein Argument zu ∞ evaluiert wird.

(b) Beweisen Sie, dass das so definierte Modell kein Nichtstandardmodell der Peano-Arithmetik ist (es also ein Peano-Axiom ϕ gibt, so dass $\mathbb{N} \cup \{\infty\} \not\models \phi$). **Hinweis:** Betrachten Sie das Induktionsaxiom für $\phi(x) = \neg(x = s(x))$.

Aufgabe 3 Modellierung gerichteter Mengen (10 Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe *gerichtete Mengen*, d.h. Modelle, die die folgenden Axiome erfüllen:

$$\textit{Reflexivität:} \quad \forall x.\ \mathsf{R}(x,x) \tag{1}$$

$$\textit{Transitivität:} \quad \forall x,y,z.\ (\mathsf{R}(x,y) \wedge \mathsf{R}(y,z)) \to \mathsf{R}(x,z) \tag{2}$$

$$\textit{Existenz einer oberen Schranke:} \quad \forall x,y.\ \exists z.\ \mathsf{R}(z,x) \wedge \mathsf{R}(z,y) \tag{3}$$

Es ist beweisbar, dass die obigen Axiome zusammen mit der Formel

$$\forall x.\ \exists y\ \neg\mathsf{R}(x,y) \tag{4}$$

die folgende Eigenschaft implizieren:

$$\forall x.\ \exists y.\ \mathsf{R}(y,x) \wedge \neg\mathsf{R}(x,y) \tag{5}$$

(a) Berechnen Sie die Semantik der Formeln (1)–(4) im Standardmodell der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$; verwenden Sie dabei die folgende Interpretation von R: *5 Punkte*

$$\mathbb{N}[\![\mathsf{R}]\!] = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist größer oder gleich } y\}.$$

Berechnen Sie dabei die Semantik der Formeln jeweils Schritt für Schritt, entsprechend den Definitionen aus der Vorlesung. Erläutern Sie die intuitive Bedeutung der Implikation (1) $\wedge$ (2) $\wedge$ (3) $\wedge$ (4) $\to$ (5).

(b) Bilden Sie ein Modell, das R interpretiert und das die Axiome (1)–(4) erfüllt, aber im Gegensatz zu Teilaufgabe (a) mindestens zwei *unvergleichbare* Elemente a und b enthält; dabei sind a und b unvergleichbar g.d.w. weder $\mathsf{R}(a,b)$ noch $\mathsf{R}(b,a)$ gilt. *5 Punkte*

Aufgabe 4 Peano-Arithmetik im Quadrat (10 Punkte)

Betrachten Sie die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ von Paaren von natürlichen Zahlen (x, y) mit $x, y \in \mathbb{N}$ und die folgende elementweise definierte Semantik von 0, s, $+$ und $\times$ über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})[\![0]\!] &= (\mathbb{N}[\![0]\!], \mathbb{N}[\![0]\!]),\\ (\mathbb{N}\times\mathbb{N})[\![s]\!](x,y) &= (\mathbb{N}[\![s]\!](x), \mathbb{N}[\![s]\!](y)),\\ (\mathbb{N}\times\mathbb{N})[\![+]\!]((x,y),(x',y')) &= (\mathbb{N}[\![+]\!](x,x'), \mathbb{N}[\![+]\!](y,y')),\\ (\mathbb{N}\times\mathbb{N})[\![\times]\!]((x,y),(x',y')) &= (\mathbb{N}[\![\times]\!](x,x'), \mathbb{N}[\![\times]\!](y,y')).\end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kein Nichtstandardmodell der Peano-Arithmetik ist, indem Sie zeigen, dass

5 Punkte (a) $\forall x, y.\ x + y = s(0) \to (x = 0 \lor y = 0)$ aus PA_1–PA_7 folgt. Führen Sie Ihren Beweis in Fitch. Verwenden Sie ohne Beweis, dass sich die Hilfsaussage

$$\forall x, x.\ x + y = 0 \to x = 0,$$

oder $\forall x, y.\ y + x = 0 \to x = 0$, je nach ihrer Wahl. Die letzte lässt sich zum Beispiel wie folgt aus PA_1–PA_7 ableiten:

1	│ │ $\boxed{n}$	
2	│ │ │ $n + 0 = 0$	
3	│ │ │ $0 = 0$	=I
4	│ │ $n + 0 = 0 \to 0 = 0$	→I, 2, 3
5	│ $\forall y.\, y + 0 = 0 \to 0 = 0\ (= \phi(0))$	∀I, 1–4
6	│ │ $\boxed{n}$	
7	│ │ │ $\forall y.\, y + n = 0 \to n = 0\ (= \phi(n))$	
8	│ │ │ │ $\boxed{m}$	
9	│ │ │ │ │ $m + s(n) = 0$	
10	│ │ │ │ │ $\forall x, y.\, x + s(y) = s(x + y)$	PA_4
11	│ │ │ │ │ $m + s(n) = s(m + n)$	∀E, 10
12	│ │ │ │ │ $0 = s(m + n)$	=E, 9, 11
13	│ │ │ │ │ $\forall x.\, \neg(0 = s(x))$	PA_1
14	│ │ │ │ │ $\neg(0 = s(m + n))$	∀E, 13
15	│ │ │ │ │ $\bot$	⊥I, 12, 14
16	│ │ │ │ │ $s(n) = 0$	⊥E, 15
17	│ │ │ │ $m + s(n) = 0 \to s(n) = 0$	→I, 9–16
18	│ │ │ $\forall y.\, y + s(n) = 0 \to s(n) = 0\ (= \phi(s(n)))$	∀I, 8–17
19	│ │ $\phi(n) \to \phi(s(n))$	→I, 7–18
20	│ $\forall x.\ \phi(x) \to \phi(s(x))$	∀I, 6–19
21	│ $\phi(0) \land \forall x.\ \phi(x) \to \phi(s(x))$	∧I, 5, 20
22	│ $\phi(0) \land (\forall x.\ \phi(x) \to \phi(s(x))) \to \forall x.\, \phi(x)$	PA_7
23	│ $\forall x.\forall y.\ x + y = 0 \to x = 0\ (= \forall x.\, \phi(x))$	→E, 21, 22

wobei $\phi(x) = \forall y.\ y + x = 0 \to x = 0$.

5 Punkte (b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \not\models \forall x, y.\ x + y = s(0) \to (x = 0 \lor y = 0)$.

Aufgabe 5 Bonusaufgabe: Unendliche Modelle (+5 Punkte)

Wir betrachten erneut die Axiome (1)-(4) aus Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass diese Axiome zusammen in keinem endlichen Modell erfüllt sein können.