Übungsblatt 11

Abgabe der Lösungen: Mo. 30.01, 12:00

Aufgabe 1 Unifikation (Präsenzaufgabe)

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus aus der Vorlesung, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen in der Signatur der Peano-Arithmetik (siehe Aufgabe 5, Übungsblatt 9) unifizierbar sind (d.h. einen Unifikator besitzen), und gegebenenfalls einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen.

1. $(x+0)+(y+0) \doteq x+s(x)$;
2. $x+s(y) \doteq 0+s(s(x))$.

Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel des Unifikationalgorithmus.

Was passiert, wenn man den Occurs-Check aus dem Unifikationsalgorithmus weglässt, d.h. (elim) auf $x \doteq E$ anwendet, ohne zu prüfen, ob $x \in FV(E)$?

Aufgabe 2 Ärzte und Quacksalber (Präsenzaufgabe)

Wir betrachten erneut die Aussagen aus Aufgabe 1, Übungsblatt 10:

1. "Jeder Arzt wird von mindestens einem Patienten gemocht";
2. "Kein Patient mag Quacksalber";
3. "Kein Arzt ist Quacksalber".

Beweisen Sie nun mittels Resolution, dass die Formel 3. aus den Formeln 1. und 2. folgt.

Aufgabe 3 Unifikation (6 Punkte)

Verwenden Sie den Unifikationsalgorithmus, um zu entscheiden, ob die folgenden Gleichungen in der Signatur der Gruppentheorie (siehe Aufgabe 5, Übungsblatt 10) unifizierbar sind (d.h. einen Unifikator besitzen), und gegebenenfalls einen allgemeinsten Unifikator zu berechnen.

2 Punkte (a) $i(i(x)) * (x * y) \doteq i(y) * (y * i(e))$;

2 Punkte (b) $i(z * i(x)) * y \doteq y * i(z * e)$.

Achtung: Annotieren Sie dabei alle Umformungsschritte explizit mit der jeweils verwendeten Regel des Unifikationalgorithmus.

2 Punkte Was passiert jeweils, wenn man den Occurs-Check aus dem Unifikationsalgorithmus weglässt, d.h. (elim) auf $x \doteq E$ anwendet, ohne zu prüfen, ob $x \in FV(E)$?

Aufgabe 4 Wiederholte Substitution (5 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Eigenschaft von Substitutionen: für jeden Term E und alle Substitutionen σ und τ gilt

$$E(\sigma\tau) = (E\sigma)\tau$$

(man erinnere sich, dass die Substitution $\sigma\tau$ durch $(\sigma\tau)(x) = \sigma(x)\tau$ definiert ist).

Hinweis: Verwenden Sie Induktion über E.

Aufgabe 5 Resolutionsvorbereitungsschritte (5 Punkte)

1. Berechnen Sie die pränexe Normalform der Formel *2 Punkte*

$$\forall x.\, \exists y,\, \mathsf{P}(x,y) \vee \exists x.\, \mathsf{Q}(x,y) \wedge \forall y.\, \mathsf{S}(y).$$

2. Berechnen Sie die Skolemform der Formel: *1 Punkt*

$$\forall x.\, \exists y.\, \forall z.\, \exists v.\, \mathsf{P}(x,y) \vee \mathsf{Q}(y,z) \wedge \mathsf{S}(v).$$

3. Zeigen Sie mittels Resolution, dass die folgende Klauselmenge unerfüllbar ist *2 Punkte*

$$\{\mathsf{S}(f(x),y), \mathsf{S}(y,z), \mathsf{P}(y)\}, \{\neg\mathsf{S}(f(f(x)),x)\}, \{\neg\mathsf{P}(f(z))\}.$$

Aufgabe 6 Resolution des Drogenschmuggels (5 Punkte)

Betrachten Sie erneut die Aufgabe 4, Übungsblatt 10:

1. Die Zollbeamten durchsuchen alle Personen, die einreisen, außer denjenigen, die diplomatische Immunität genießen.
2. Einige Personen, die Drogenschmuggel betreiben, sind eingereist und wurden **ausschließlich** von Personen durchsucht, die ebenfalls Drogenschmuggel betreiben.
3. Keine der Personen, die diplomatische Immunität genießen, betreibt Drogenschmuggel.
4. Einige Zollbeamte betreiben Drogenschmuggel.

Beweisen Sie nun mit Resolution, dass 4. aus 1., 2. und 3. folgt. Gehen Sie wie folgt vor:

1. Bringen Sie die Negation der Formel in Negationsnormalform.
2. Bestimmen Sie die pränexe Normalform und anschließend die Skolemform.
3. Bringen Sie den quantorenfreien Anteil in CNF.
4. Führen Sie Resolution auf der resultierenden Klauselmenge durch.