Übungsblatt 10

Abgabe der Lösungen: Do. 23.01, 12:00

Aufgabe 1 Ärzte und Quacksalber (Präsenzaufgabe)

Wir betrachten die folgenden Aussagen und ihnen entsprechende prädikatenlogische Formeln erster Stufe. Machen Sie sich klar, welche intuitive Bedeutung die Prädikate $\mathsf{P}(x)$, $\mathsf{D}(x)$, $\mathsf{Q}(x)$ und $\mathsf{L}(x, y)$ hier jeweils haben und weshalb die Formeln die jeweiligen Aussagen korrekt formalisieren.

1. "Jeder Arzt wird von mindestens einem Patienten gemocht";
2. "Kein Patient mag Quacksalber";
3. "Kein Arzt ist Quacksalber".

(a) Leiten Sie sodann im Fitch-Kalkül die Formel 3. aus den Formeln 1. und 2. her.

(b) Formalisieren Sie ferner Ihren Beweis in Coq.

Um Fitch-Beweise in Coq nachzubilden, können Sie die Regeln mittels folgender Tabelle (die die für Aussagenlogik bereits angegebene ergänzt) in Coq übertragen.

Fitch-Regel	Coq-Taktik
$\forall I$	`intro x0.`
$\forall E$	`apply H.`
$\exists I$	`exists t.`
$\exists E$	`destruct H.`

Die Axiomen kann man mit dem Schlüsselwort `Axiom` einführen und ferner mit der `pose proof` Taktik aufrufen, z.B. fügt

```
pose proof AX as AX.
```

das Axiom `AX` zu den Prämissen hinzu.

Aufgabe 2 Gleichungslogik in Fitch (Präsenzaufgabe)

Sei X eine Menge mit einer binäre Operation $\$ \colon X \times X \to X$, die folgende Gleichung erfüllt:

$$y \mathbin{\$} (x \mathbin{\$} y) = x$$

(a) Beweisen Sie erst informell, dass auch

$$(x \mathbin{\$} y) \mathbin{\$} x = y$$

stets gilt.

(b) Formalisieren Sie ferner Ihren Beweis in Fitch. Dafür brauche Sie die Regeln (=I) und (=E) für Gleichheit aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 Das Trinkerparadoxon in Prädikatenlogik (6 Punkte)

Das sogenannte "Trinkerparadoxon" lautet: *"Es gibt jemanden in der Kneipe, so dass, wenn er trinkt, auch alle anderen trinken"*.

Diese Aussage lässt sich auf natürliche Weise in Logik erster Stufe formalisieren.

(a) Wie? *1 Punkt*

(b) Beweisen Sie die betreffende Formel in Fitch. *3 Punkte*

(c) Beweisen Sie die betreffende Formel in Coq. *2 Punkte*

Achtung: Die betreffende Formel entspricht nicht den in der Vorlesung behandelten aristotelischen Formen. So etwas ist fast immer falsch oder zumindest nutzlos, außer eben für humoröse Zwecke wie dieses Paradox, das in der Tat gerade deswegen so paradox ist, weil es von den aristotelischen Formen abweicht.

Aufgabe 4 Drogenschmuggel Prädikatenlogisch (8 Punkte)

Formalisieren Sie die folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln erster Stufe. *2 Punkte*

1. Die Zollbeamten durchsuchen alle Personen, die einreisen, außer denjenigen, die diplomatische Immunität genießen.
2. Einige Personen, die Drogenschmuggel betreiben, sind eingereist und wurden **ausschließlich** von Personen durchsucht, die ebenfalls Drogenschmuggel betreiben.
3. Keine der Personen, die diplomatische Immunität genießen, betreibt Drogenschmuggel.
4. Einige Zollbeamte betreiben Drogenschmuggel.

Hinweis: Wählen Sie die Signatur der Prädikaten wie folgt: $\mathsf{E}(x)$ für "x reist ein", $\mathsf{I}(x)$ für "x genießt diplomatische Immunität", $\mathsf{S}(x, y)$ für "x durchsucht y ", $\mathsf{Z}(x)$ für "x ist Zollbeamte*r", und $\mathsf{D}(x)$ für "x betreibt Drogenschmuggel".

Beweisen Sie ferner, dass 4. aus 1., 2. und 3. folgt, jeweils

(a) in Fitch; *3 Punkte*

(b) in Coq. *3 Punkte*

Aufgabe 5 Gruppentheorie als Theorie erster Stufe (6 Punkte)

Gruppentheorie ist die Theorie erster Stufe über den Operationen $e/0$, $i/1$, $*/2$, die mittels der folgenden Axiome definiert ist

- $\forall x.\ i(x) * x = e$;
- $\forall x.\ e * x = x$;
- $\forall x.\ \forall y.\ \forall z.\ (x * y) * z = x * (y * z)$.

Beweisen Sie in Fitch, dass aus diesen Axiomen die folgende Gleichung folgt: $i(e) = e$.

Der Kürze halber dürfen Sie gleichzeitig mehrere Allquantoren in einem Schritt eliminieren bzw. einführen, z.B.

1	$\vdots$	
2	$\forall x. \forall y. \forall z. (x * y) * z = x * (y * z)$	
3	$\vdots$	
4	$\vdots$	
5	$(c * i(c)) * c = c * (i(c) * c)$	$\forall$E, 2
6	$\vdots$	