Übungsblatt 9

Abgabe der Lösungen: Do. 16.01, 12:00

Aufgabe 1 Verbesserte Resolution (Präsenzaufgabe)

Sei A ein Atom und φ eine Menge von Klauseln. Seien φ/A und $\varphi/\neg A$ die in der Vorlesung definierten Klauselmengen

$$\varphi/A = \{\, C \setminus \{\neg A\} \mid A \notin C, C \in \varphi \,\}$$
$$\varphi/\neg A = \{\, C \setminus \{A\} \mid \neg A \notin C, C \in \varphi \,\}.$$

1. *Pure Literal Elimination (PLE):* Zeigen Sie, dass das Resolutionsverfahren angewendet auf φ dieselbe Antwort liefert wie für φ/A ($\varphi/\neg A$), wenn $\neg A \notin C$ ($A \notin C$) für alle $C \in \varphi$.
2. *Unit Propagation (UP):* Zeigen Sie, dass das Resolutionsverfahren angewendet auf φ dieselbe Antwort liefert wie für φ/A ($\varphi/\neg A$), wenn $\{A\} \in \varphi$ ($\{\neg A\} \in \varphi$).

Zeigen Sie die Unerfüllbarkeit der Klauselmenge

$$\{D, B, \neg C\}, \{D, C\}, \{\neg D, B\}, \{\neg C, B, \neg A\}, \{C, B, \neg A\}, \{\neg B, \neg A\}, \{\neg B, A\},$$

unter Verwendung der obigen Prinzipien.

Aufgabe 2 Freie Variablen (Präsenzaufgabe)

Berechnen Sie für die folgende Formel die Mengen der freien Variablen nach der rekursiven Definition aus der Vorlesung:

$$(\forall x.\, \mathsf{P}(x) \wedge \exists x.\, \mathsf{P}(y)) \wedge \exists y.\, \mathsf{Q}(x).$$

Aufgabe 3 Variablensubstitution (Präsenzaufgabe)

Man erinnere sich aus der Vorlesung, dass eine *Substitution* eine Funktion ist, die Variablen auf Terme abbildet und dabei alle bis auf endlich viele Variablen auf sich selbst abbildet. Mit $[E_1/x_1, \dots, E_n/x_n]$ bezeichnen wir für paarweise verschiedene Variablen x_i die Substitution, die jeweils x_i auf E_i abbildet und alle anderen Variablen auf sich selbst.

Für Formeln ϕ und Ausdrücke E wird das Ergebnis $\phi\sigma$ bzw. $E\sigma$ der Anwendung einer Substitution σ auf ϕ bzw. E gemäß Vorlesung wie folgt rekursiv berechnet:

- $x\sigma = \sigma(x)$;
- $f(E_1, \dots, E_n)\sigma = f(E_1\sigma, \dots, E_n\sigma)$, wobei f ein Funktions- oder Prädikatensymbol ist;
- $(E = D)\sigma = (E\sigma = D\sigma)$;
- $(\neg\phi)\sigma = \neg(\phi\sigma)$;

- $(\phi \wedge \psi)\sigma = \phi\sigma \wedge \psi\sigma$;
- $(\forall x.\, \phi)\sigma = \forall y.\, \phi\sigma'$, wobei $\sigma'(x) = y$, $\sigma'(z) = \sigma(z)$ für jedes $z \neq x$, und wobei ferner y so gewählt ist, dass $y \notin FV(\sigma(z))$ für alle $z \in FV(\forall x.\, \phi)$.

(Damit ist Substitution natürlich nur bis auf Umbenennung gebundener Variablen eindeutig definiert.)

Berechnen Sie das Ergebnis der folgenden Substitution:

$$((\forall x.\, \mathsf{R}(x,y)) \wedge \mathsf{Q}(y))[c/x, f(x,y)/y, c/z].$$

Achtung: Dabei ist c eine Konstante, und x, y und z sind Variablennamen.

Aufgabe 4 Verbesserte Resolution bei der Arbeit (4 Punkte)

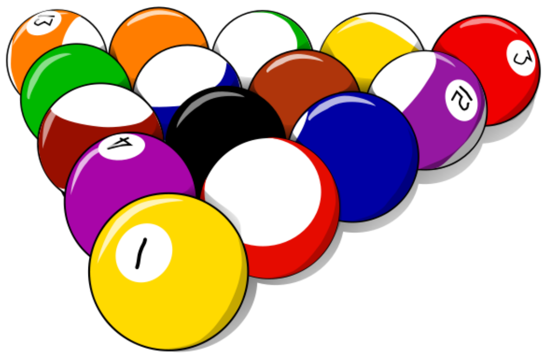
Überprüfen Sie, ob die folgenden als Klauselmengen geschriebenen CNFs konsistent sind. Verwenden Sie dabei die Ergebnisse von Aufgabe 1. Verwenden Sie mindestens einmal PLE.

(a) $\{P, W\}, \{\neg R, P\}, \{\neg P, W\}, \{P, Q, R\}, \{P, \neg Q, R\}, \{\neg P, W, U\}, \{\neg P, \neg W, R\}, \{\neg P, \neg W, \neg R\}$. *2 Punkte*

(b) $\{P, Q, W\}, \{P, \neg Q, R\}, \{P, \neg Q, \neg R\}, \{\neg P, R, W\}, \{\neg P, \neg R, W\}, \{\neg W, R\}, \{\neg W, \neg Q\}$. *2 Punkte*

Aufgabe 5 Dreieckszahlen in Peano-Arithmetik (6 Punkte)

Peano-Arithmetik ist eine Formalisierung der natürlichen Zahlen in Logik erster Stufe (aus dem Jahr 1889!) über den Operationen $+$ (Addition), $\times$ (Multiplikation), s (Nachfolger) und der Konstante 0 (Null). Die unterliegende Signatur ist also $\Sigma_{\mathsf{Peano}} = \{+/2, \times/2, s/1, 0/0\}$. Zusätzliche Symbole dürfen nur in Form von Abkürzungen verwendet werden, z.B. 1 für $s(0)$ (Nachfolger von 0).



Ziel dieser Aufgabe ist die Formalisierung von mathematischen Aussagen in Peano-Arithmetik.

Eine *Dreieckszahl* ist eine Zahl, die als Summe aller Zahlen von 1 bis zu einer Obergrenze n darstellbar ist. Beispielsweise ist 15 eine Dreieckszahl, da $1+2+3+4+5 = 15$ ist. Eine *Quadratzahl* ist im gleichen Sinn (warum?) eine Zahl, die als Summe der ersten n ungeraden Zahlen für geeignetes n darstellbar ist, wie z.B. $16 = 1 + 3 + 5 + 7$. Nehmen Sie ohne Beweis an, dass Dreiecks- bzw. Quadratzahlen der Form $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ bzw. n^2 sind und formalisieren Sie die folgenden Aussagen:

(a) n ist eine Dreieckszahl. *1 Punkt*

(b) gerade Quadratzahlen sind durch 4 teilbar. *2 Punkte*

(c) Es gibt unendlich viele Zahlen, die gleichzeitig eine Dreieckzahl und eine Quadratzahl sind. *3 Punkte*

Achtung: Es darf ausdrücklich nur die ursprüngliche Signatur $\Sigma_{\mathsf{Peano}} = \{+/2, \times/2, s/1, 0/0\}$ verwendet werden. Zusätzliche Symbole dürfen nur in Form von Abkürzungen verwendet werden.

Aufgabe 6 Freie Variablen (4 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Formeln die Mengen der freien Variablen nach der rekursiven Definition aus der Vorlesung:

2 Punkte (a) $\forall x.\, \mathsf{S}(x, y) \vee \exists y.\, x = f(z) \to \mathsf{S}(x, y) \to \mathsf{P}(y)$;

2 Punkte (b) $(\forall x.\, \mathsf{P}(x) \to \mathsf{R}()) \vee ((\exists x.\, \mathsf{P}(x)) \to \mathsf{S}(y, x) \to \forall y.\, \mathsf{S}(x, z))$.

Achtung: Verwenden Sie die Lesekonventionen aus der Vorlesung, und zwar:

1. Implikation ist rechtsassoziativ, d.h. $\phi \to \psi \to \xi$ liest sich als $\phi \to (\psi \to \xi)$, und nicht als $(\phi \to \psi) \to \xi$;
2. Implikation bindet am schwächsten, z.B. liest sich $\phi \wedge \psi \to \xi \vee \zeta$ als $(\phi \wedge \psi) \to (\xi \vee \zeta)$ – und nicht etwa als $\phi \wedge (\psi \to \xi) \vee \zeta$ oder $\phi \wedge (\psi \to (\xi \vee \zeta))$;
3. der Geltungsbereich der Quantoren reicht so weit wie möglich nach rechts, so dass sich z.B. $\forall x.\, \mathsf{P}(x) \vee \mathsf{S}(x, y)$ als $\forall x.\, (\mathsf{P}(x) \vee \mathsf{S}(x, y))$ liest, und nicht als $(\forall x.\, \mathsf{P}(x)) \vee \mathsf{S}(x, y)$.

Aufgabe 7 Variablensubstitution (6 Punkte)

3 Punkte (a) Vervollständigen Sie die Definition aus Aufgabe 3, indem Sie entsprechende Gleichungen für $(\phi \vee \psi)\sigma$, $(\phi \to \psi)\sigma$, $(\phi \leftrightarrow \psi)\sigma$ und $(\exists x.\ \phi)\sigma$ angeben, die sich aus der Kodierung von $\phi \vee \psi$ als $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$, von $\phi \to \psi$ als $\neg\phi \vee \psi$, von $\phi \leftrightarrow \psi$ als $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$ und von $\exists x.\, \phi$ als $\neg(\forall x.\, \neg\phi)$ ergeben.

Achtung: Gefragt sind sowohl die entsprechenden Gleichungen als auch Begründungen, warum sie tatsächlich folgen.

3 Punkte (b) Berechnen Sie die folgende Substitution, **ohne** neue (d.h. nicht bereits in der jeweiligen Formel vorkommende) Variablennamen einzuführen:

$$(\exists x.\, \mathsf{P}(z) \wedge \forall y.\, \mathsf{S}(x, y))[f(x, y)/x, f(g(x), z)/z].$$