Grundlagen der Logik in der Informatik WS 2022

Übungsblatt 7

Abgabe der Lösungen: Mo. 19.12, 12:00

Aufgabe 1 Beweis durch Fallunterscheidung (Präsenzaufgabe)

Beweis durch Fallunterscheidung ist eine Beweisstrategie, die man wie folgt beschreiben kann: Um einen Satz ϕ zu beweisen, reicht es aus, ein ψ zu finden, so dass sowohl ψ als auch $\neg\psi$ (jeweils für sich genommen natürlich) ϕ implizieren.

1. Zeigen Sie, dass der Beweis durch Fallunterscheidung ein gültiges Prinzip des Fitch-Kalküls ist. Führen Sie zu diesem Zweck eine neue Fitch-Regel ein, die den Beweis durch Fallunterscheidung implementiert, und zeigen Sie, dass diese im Fitch-Kalkül herleitbar ist.

2. Implementieren Sie das Fallunterscheidungsprinzip in Coq. Vervollständigen Sie hierzu den folgenden Coq-Beweis:

```
Require Import Classical_Prop.            (* liefert u.a. NNPP, d.h. ~ E *)

Section Fallunterscheidung.               (* Anfang des Namensraums *)
Variables x y: Prop.                      (* Lokale Variablen *)
Lemma FU : ((x -> y) /\ (~x -> y)) -> y.
Proof.
                                          (* Beweis hier einfügen *)
Qed.
End Fallunterscheidung.                   (* Ende des Namensraums *)
```

3. Beweisen Sie mithilfe des Fallunterscheidungsprinzips

   (a) das *Gödel-Dummett-Axiom* $(A \to B) \vee (B \to A)$.

   (b) *Peirce's law* $((A \to B) \to A) \to A$;

   (c) *Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten*: $A \vee \neg A$.

Aufgabe 2 Herleitungen in Coq (9 Punkte)

Führen Sie die folgenden Herleitungen in Coq durch:

3 Punkte 1. $(A \vee B) \to (A \wedge B) \vdash (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$;

3 Punkte 2. $A \to (\neg B \vee \neg A) \vdash (A \to \neg B) \vee \neg B$;

3 Punkte 3. $A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Dabei dürfen Sie ausschließlich die Taktiken `intro`, `apply`, `exact`, `assumption`, `split`, `left`, `right`, `contradiction`, `destruct` und `assert` benutzen, dennoch ohne `NNPP` aufzurufen (!) Zusätzlich dürfen Sie – jedoch höchstens **insgesamt einmal** – das in Aufgabe 1 bewiesene Lemma verwenden. Dieses lässt sich wie folgt aufrufen:

`apply FU with (x:=`ψ`).`

(wobei ψ eine geeignete aussagenlogische Formel ist); dadurch wird das aktuelle Ziel ϕ mit der Konjunktion $(\psi \to \phi) \wedge (\neg\psi \to \phi)$ ersetzt.

Aufgabe 3 Elefantengedächtnis (4 Punkte)

Wir erinnern uns an die fünf Annahmen aus Aufgabe 2, Übungsblatt 5:

- Elefanten vergessen nie.
- Kein Geschöpf, das jemals *Mastermind* gewonnen hat, hatte einen Rüssel.
- Ein Geschöpf, das nichts vergisst, wird *Mastermind* stets gewinnen, vorausgesetzt, es nimmt am Turnier teil.
- Ein Geschöpf ohne Rüssel ist kein Elefant.
- Im Jahr 2001 nahm ein Elefant am *Mastermind*-Turnier teil.

Beweisen Sie, dass die fünf Annahmen zusammengenommen unerfüllbar sind. Führen Sie Ihren Beweis nach Ihrer Wahl in Fitch oder in Coq. Ihren eventuellen Coq-Beweis soll dabei wieder nur die in Aufgabe 2 angegeben Taktiken verwenden.

Hinweis: Um die Widersprüchlichkeit der fünf Annahmen A_1 bis A_5 zu zeigen, genügt es, die Formel

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4 \wedge A_5) \rightarrow \bot$$

in Coq zu beweisen; die Formel $\bot$ lässt sich in Coq als `False` kodieren.

Aufgabe 4 Negationsnormalform (7 Punkte)

(a) In dieser Aufgabe betrachten wir Formeln, die aus Konjunktion, Disjunktion, Negation, $\top$, $\bot$ und Atomen aufgebaut sind. Eine solche Formel ψ ist genau dann in *Negationsnormalform* (NNF), wenn alle Negationen in ihr direkt vor Atomen stehen. Wir definieren nun die folgende rekursive Berechnungsvorschrift: *5 Punkte*

$$\mathsf{NNF}(\psi) = \psi \qquad \begin{array}{l}\text{wenn } \psi \text{ ein Atom, oder}\\ \text{ein negiertes Atom ist, oder}\\ \psi = \top\text{, oder } \psi = \bot\end{array}$$

$$\mathsf{NNF}(\neg\psi) = \begin{cases} \top & \text{wenn } \psi = \bot \\ \bot & \text{wenn } \psi = \top \\ \mathsf{NNF}(\phi) & \text{wenn } \psi = \neg\phi \\ \mathsf{NNF}(\neg\phi) \vee \mathsf{NNF}(\neg\chi) & \text{wenn } \psi = \phi \wedge \chi \\ \mathsf{NNF}(\neg\phi) \wedge \mathsf{NNF}(\neg\chi) & \text{wenn } \psi = \phi \vee \chi \end{cases}$$

$$\mathsf{NNF}(\psi \wedge \phi) = \mathsf{NNF}(\psi) \wedge \mathsf{NNF}(\phi)$$

$$\mathsf{NNF}(\psi \vee \phi) = \mathsf{NNF}(\psi) \vee \mathsf{NNF}(\phi)$$

Beweisen Sie, dass für jede Formel ψ, die Formel $\mathsf{NNF}(\psi)$ eine Negationsnormalform von ψ ist, d.h., dass $\mathsf{NNF}(\psi)$ in Negationsnormalform ist und dass $\mathsf{NNF}(\psi) \equiv \psi$.

Hinweis: Verwenden Sie Induktion über Formeln. Achten Sie darauf, dass z.B. $\neg\phi$ nicht strukturell kleiner als $\neg(\phi \wedge \chi)$ ist. Deshalb, um Induktion zu führen, müssen Sie die obige Definition zunächst umformulieren, indem die eine Hilfsfunktion NNF' einführen mit der Eigenschaft, dass $\mathsf{NNF}(\neg\phi) = \mathsf{NNF}'(\phi)$. Die Funktionen NNF und NNF' in der neuen Definition müssen einander gegenseitig rekursiv aufrufen.

2 Punkte (b) Berechnen Sie $\mathsf{NNF}(\neg\neg(\neg A \vee \neg(\neg B \wedge \neg C)))$. Geben Sie die Zwischenschritte an.