Übungsblatt 3

Abgabe der Lösungen: Mo. 21.11, 12:00

Aufgabe 1 Verstärkung im Induktionsbeweis (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie, dass

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Hinweis: Man erfinde eine geeignete Funktion f über den positiven reellen Zahlen, so dass

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - f(n).$$

Aufgabe 2 Course-of-Values-Induktion (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie folgende Behauptungen durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$: Sei x eine reelle Zahl, so dass $x + 1/x$ eine ganze Zahl ist. Dann ist $x^n + 1/x^n$ auch eine ganze Zahl.

Aufgabe 3 Fehlerhafte Induktion (Präsenzaufgabe)

Was ist bei den folgenden Induktionsbeweisen falsch gelaufen?

Alle Zahlen sind gleich.

Wir beweisen mittels Induktion, dass alle zwei benachbarten natürlichen Zahlen gleich sind, d.h. wir beweisen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$n = n + 1$$

gilt. Dazu nehmen wir an, dass diese Formel für alle kleineren Werte von n gilt. Dann muss die Formel insbesondere für den vorherigen Wert des Parameters n, also für $n - 1$, wahr sein. Das bedeutet: $(n - 1) = (n - 1) + 1$, also $n - 1 = n$. Indem wir auf beiden Seiten der Gleichung 1 addieren, erhalten wir $n = n + 1$.

Alle Schafe einer Herde haben die gleiche Farbe.

Beweis per Induktion über die Größe n der Herde:

Induktionsanfang $n = 1$: klar.

Induktionsschritt $n - 1 \to n$: Wir betrachten eine Herde von n Schafen. Wenn wir ein Schaf herausnehmen, bleibt eine Herde von $n - 1$ Schafen, die nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe haben, übrig. Jetzt fügen wir das herausgenommene Schaf wieder hinzu und nehmen ein anderes Schaf heraus; auch hier haben die übriggebliebenen $n-1$ Schafe nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe. Also haben alle n Schafe der Herde die gleiche Farbe.

Aufgabe 4 Fehlerhafte Induktion (4 Punkte)

Was ist bei dem folgenden Induktionsbeweis falsch gelaufen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Wir beweisen für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$, dass alle beliebigen n Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

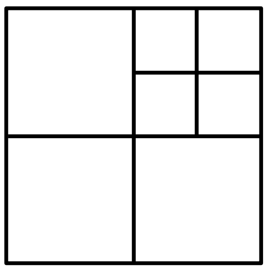
Für $n = 1$ und $n = 2$ ist dies klar (der Euklidischen Geometrie liegen entsprechende Axiome zu Grunde). Es bleibt also übrig, die Behauptung für jedes $n > 2$ zu beweisen, vorausgesetzt, dass sie für $n-1$ wahr ist. Seien also $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ (für $n > 2$) n beliebige Punkte. Wir betrachten nun die ersten $n-1$ dieser Punkte und wenden die Induktionshypothese an. Wir erhalten die Gerade l, auf der die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ liegen.

Wir müssen beweisen, dass der letzte Punkt A_n auf der gleichen Gerade liegt. Nun betrachten wir die letzten $n-1$ Punkte und wenden erneut die Induktionshypothese an, diesmal auf die Punkte $A_2, A_3, \ldots, A_n$. Wir erhalten eine Gerade l' auf der diese Punkte liegen. Können die Geraden l und l' verschieden sein? Nein, denn sie gehen beide durch die Punkte A_2 und A_{n-1}, und wie wir aus der Geometrie wissen, kann nur eine Gerade durch zwei Punkte gezogen werden. Die Geraden l und l' fallen also zusammen und laufen durch alle n Punkte.

Aufgabe 5 Quadratur des Quadrates* (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 6$ jedes Quadrat mittels geraden Strecken in n (nicht unbedingt gleiche) Quadrate aufgeteilt werden kann.

Hinweis: Induktion über n. Machen Sie sich klar, welche Zahlen n im Beweis der Induktionsbasis zu betrachten sind. Nutzen Sie zur Inspiration die Lösung für $n = 7$ auf der rechten Seite.



Aufgabe 6 Course-of-Values-Induktion (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl, d.h. $\sqrt{2} \neq p/q$ für alle ganze Zahlen p, q, wobei auch $q \neq 0$.

Hinweis: Induktion über q.

Aufgabe 7 Verstärkung im Induktionsbeweis (6 Punkte)

Beweisen Sie, dass

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

*Obwohl der Titel lustig klingt, ist die *Quadratur des Quadrates* **im allgemeinen** ein hartes mathematisches Problem: `https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratur_des_Quadrates`.

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Hinweis: Man verwende das Induktionsverstärkungprinzip, indem man eine stärkere Ungleichung beweise, und zwar, dass das Produkt kleiner oder gleich $1/\sqrt{n+\frac{1}{2}}$ ist. Warum ist dies eine stärkere Aussage?