Grundlagen der Logik in der Informatik WS 2022

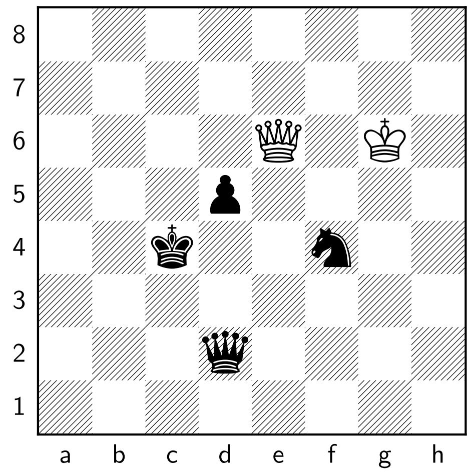
# Übungsblatt 2

## Abgabe der Lösungen: Mo. 14.11, 12:00

---

## Aufgabe 1 Schachrelationen (Präsenzaufgabe)

Die üblichen Bezeichnungen der Felder eines Schachbretts sind genau die Elemente des Kartesischen Produkts $\mathit{Cells} = \{\mathsf{a}, \ldots, \mathsf{h}\} \times \{1, \ldots, 8\}$. Die Schachstellung



lässt sich also durch eine Abbildung $\ell \colon X \to \{$♙, ♖, ♘, ♗, ♕, ♔$\} \cup \{$♟, ♜, ♞, ♝, ♛, ♚$\}$ für passendes $X \subseteq \mathit{Cells}$ beschreiben.

1. Beschreiben Sie diese Abbildung. (Insbesondere: Was ist $X$?)

2. Führen Sie die folgenden Relationen auf $X$ ein:

(a) unäre Relationen *Schwarz* und *Weiß*, die die Farbe der Figur auf dem Feld bestimmen;

(b) die folgenden binären Relationen *Bedroht* und *Beschützt*:

- *Bedroht* besagt, dass die Figur, die gemäß $\ell$ auf dem zweiten Feld steht, von der Figur, die gemäß $\ell$ auf dem ersten Feld steht, bedroht wird* (was insbesondere beinhaltet, dass die Figuren von entgegengesetzter Farbe sind);
- *Deckt* besagt, dass, wenn die Figur, die gemäß $\ell$ auf dem zweiten Feld steht, von einer gegnerischen Figur geschlagen wird (egal ob gerade vorhanden oder nicht), die gegnerische Figur dann direkt von der Figur, die gemäß $\ell$ auf dem des ersten Feld steht, bedroht wird.

(c) die ternäre Relation *Verdeckt*, die besagt (wie immer unter der durch $\ell$ vermittelten Zuordnung zwischen Feldern und Figuren), dass genau dann die zweite Figur von der dritten Figur bedroht wird, wenn die erste Figur (aus der Zugbahn der dritten) entfernt wird.

---

*Siehe Zugregeln unter `https://de.wikipedia.org/wiki/Schach#Zugregeln`

3. Sind die folgenden Aussagen korrekt?

(a) $\mathit{Schwarz} = X \setminus \mathit{Weiss}$;

(b) $\mathit{Deckt} \subseteq (\mathit{Schwarz} \times \mathit{Weiss}) \cup (\mathit{Weiss} \times \mathit{Schwarz})$;

(c) $\mathit{Verdeckt} \subseteq \mathit{Schwarz} \times \mathit{Schwarz} \times \mathit{Schwarz}$.

4. Überprüfen Sie, ob die Relationen *Bedroht* und *Beschützt* jeweils Reflexivität, Symmetrie, Transitivität oder Antisymmetrie erfüllen.

## Aufgabe 2 Abzählbare Mengen und darüber hinaus (Präsenzaufgabe)

Eine Menge $A$ ist abzählbar, wenn eine injektive Abbildung von $A$ in die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen existiert.

1. Beweisen Sie, dass, wenn $A$ und $B$ abzählbar sind, die folgenden Mengen ebenfalls abzählbar sind: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, sowie $f[A]$, wobei $f$ eine beliebige Abbildung ist.
2. Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen abzählbar sind:
   (a) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen;
   (b) Die Menge $\mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q\}$ der nichtnegativen rationalen Zahlen .
3. Beweisen Sie, dass nicht abzählbare Mengen existieren.

## Aufgabe 3 Abbildungen und Bijektionen (Präsenzaufgabe)

Für Mengen $A$ und $B$ bezeichnet $B^A$ die Menge der Funktionen $f\colon A \to B$. Existiert eine Bijektion zwischen $A$ und $B$, so schreiben wir auch $A \cong B$.

1. Beweisen Sie, dass $\cong$ eine Äquivalenz ist (in dem Sinne, dass die Relation im offensichtlichen Sinne reflexiv, transitiv und symmetrisch ist; es handelt sich natürlich hier nicht um eine Relation auf einer Menge, da die Ansammlung aller Mengen selbst keine Menge bildet).
2. Beweisen Sie, dass für Mengen $A$, $B$, $C$ gilt: $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$.

## Aufgabe 4 Familienverhältnisse (7 Punkte)

Die Hauptperson des folgenden Songs hat durch eine Argumentationskette darauf geschlossen, dass er sein eigener Großvater ist.

*Mein Opa, das bin ich — mein Opa, das bin ich,*
*keiner will's kapiern, doch jedem kann's passiern,*
*mein Opa, das bin ich.*

*Es war vor vielen Jahren, es fing ganz harmlos an,*

*ich traf 'ne reiche Witwe und wurde ihr zweiter Mann.*
*Die Tochter dieser Witwe war grade 18 Jahr',*
*sie fuhr auf meinen Vater ab und ab gings zum Altar.*

*So wurde mein Vater mein Schwiegersohn, doch damit fing's erst an.*
*Meine Stieftochter war meine Stiefmutter, denn mein Vater war ihr Mann.*
*So weit, so gut, wir blickten durch, so lief das erste Jahr.*
*Dann klingelte der Klapperstorch und ich wurde Papa.*

*Mein Opa, das bin ich — mein Opa, das bin ich,*
*keiner will's kapiern, doch jedem kann's passiern,*
*mein Opa, das bin ich.*

*Mein Sohn war nun der Bruder von der Tochter meiner Frau,*
*also Schwager meines Vaters, daraus wurde ich noch schlau.*
*Doch als Schwager meines Vaters, fiel mir mit Schrecken ein*
*wird mein Sohn nicht nur mein Sohn, sondern auch mein Onkel sein.*

*Die Tochter meiner Frau bekam ein Zwillingspaar.*
*Das waren meine Brüder, weil sie Vater's Söhne war'n.*
*Und wenn das meine Brüder sind, das sieht wohl jeder ein,*
*muß ihre Oma — meine Frau — auch meine Oma sein.*

*Wenn meine Frau meine Oma ist, bin ich ihr Enkelkind,*
*womit wir fast am Ende uns'rer kleinen Chronik sind.*
*Denn als Mann von meiner Oma, da gibt's keine Diskussion,*
*bin ich nicht nur mein Opa sondern auch mein Enkelsohn!*

Analysieren Sie diese Geschichte aus dem mengentheoretischen Sicht, und zwar, wie folgt.

*1 Punkt* 1. Führen Sie die Menge $P$ aller in der Geschichte verwickelten Personen ein, d.h. listen Sie die Elemente von $P$ auf. Benennen Sie diese nach Belieben, z.B. *Ich*, *VtrvonVtr*, *Wtw*, usw.

Sie müssen nur dann neue Elemente zu $P$ hinzufügen, wenn diese auch im Text eingeführt worden sind, und nicht wenn diese (eventuell indirekt) nur erneut erwähnt werden.

*1 Punkt* 2. Definieren Sie binäre Relationen *MannVon*, *FrauVon*, *KindVon* und *EhepartnerVon* über $P$, wobei wir hier und im Weiteren “Kind” als biologisches Kind verstehen.

*2 Punkte* 3. Führen Sie die binäre Relation $DN$ (direkter Nachfahre) über $P$ ein, so dass $(x, y) \in DN$, wenn $x$ ein Kind von $y$ ist oder wenn $(x, y') \in DN$, wobei $y'$ ein Ehepartner von $y$ ist.

**Achtung:** diese Beschreibung definiert $DN$ nicht eindeutig. Geben Sie **zwei** weitere mögliche Definitionen von $DN$ an, die diese Beschreibung erfüllen. Welche besondere Eigenschaft unterscheidet die “richtige” Definition von den anderen?

*2 Punkte* 4. Führen Sie ebenso die binäre Relation $N$ (Nachfahre) ein, so dass ein direkter Nachfahre ein Nachfahre ist, und ein Nachfahre eines direkten Nachfahren ebenfalls ein Nachfahre ist. Wie kann man wiederum $N$ falsch definieren, so dass diese Beschreibung dennoch stimmt?

*1 Punkt* 5. Welche der obigen Relationen sind reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch?

## Aufgabe 5 Abzählbare Mengen (5 Punkte)

Bewiesen Sie die folgenden weiteren Tatsachen.

1. Endliche Mengen sind abzälbar. *1 Punkt*

2. Ist $B$ abzählbar und $f\colon A \to B$ eine injektive Funktion, so ist auch $A$ abzählbar. Geben Sie auch ein Beispiel von $A$, $B$ und $f$ an, so dass $B$ abzählbar ist, aber $A$ nicht. Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabe 2. *2 Punkte*

3. Beweisen Sie, dass eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist. Explizit:, $\bigcup \mathfrak{A}$ ist abzählbar, wenn $\mathfrak{A}$ eine Menge von Mengen ist, die selbst abzählbar ist, und ferner jedes $A \in \mathfrak{A}$ abzählbar ist. *2 Punkte*

**Hinweis**: Verwenden Sie die gleiche Idee wie in Aufgabe 2.2.b für die nichtnegativen rationalen Zahlen.

## Aufgabe 6 Abbildungen (8 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Tatsachen über Abbildungen.

1. Für jedes $f\colon A \to B$ ist die binäre Relation $\sim_f = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$ eine Äquivalenz. *2 Punkte*

2. Jedes $f\colon A \to B$ ist als Komposition $f = g \circ h$ darstellbar, wobei $h\colon A \to f[A]$ eine Surjektion und $g\colon f[A] \to B$ eine Injektion ist. *2 Punkte*

3. Konstruieren Sie eine Bijektion zwischen den nichtnegativen rationalen Zahlen $\mathbb{Q}_+$ und der Menge $\mathbb{N}^\star$ der endlichen Folgen $(n_1, \ldots, n_k)$ von natürlichen Zahlen (inklusive der leeren Folge!). *2 Punkte*
**Hinweis**: Wenden Sie den Fundamentalsatz der Arithmetik[†] jeweils auf Zähler und Nenner von Brüchen an und verwenden Sie die Idee aus Aufgabe 2.2.a.

4. Man kann natürliche Zahlen als Mengen lesen, und zwar $n \in \mathbb{N}$ als die Menge $\{0, \ldots, n-1\}$. Das ist die sogenannte *Von-Neumann-Kodierung* von $\mathbb{N}$. Beispielsweise ist 0 dann die leere Menge, und 2 die Menge $\{0, 1\}$. Beweisen Sie, dass für jede Menge $A$ gilt, dass $2^A \cong \mathcal{P}A$ (Dies liest sich als eine Verbindung zwischen Teilmengen von $A$ und Funktionen von $A$ nach 2, die intuitiv für jedes Element zurückgeben, ob es in der jeweiligen Teilmenge enthalten ist oder nicht). Dabei ist $2^A$ die Menge der Abbildungen $A \to 2$ (wie in Aufgabe 3). *2 Punkte*

[†] Der Fundamentalsatz der Arithmetik sagt aus, dass jede natürliche Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat (`https://de.wikipedia.org/wiki/Primfaktorzerlegung`).