Übungsblatt 11 (Lösungen)

Aufgabe 2 Ärzte und Quacksalber

Wir betrachten erneut die Aussagen aus Aufgabe 1, Übungsblatt 10:

1. "Jeder Arzt wird von mindestens einem Patienten gemocht";
2. "Kein Patient mag Quacksalber";
3. "Kein Arzt ist Quacksalber".

Beweisen Sie nun mittels Resolution, dass die Formel 3. aus den Formeln 1. und 2. folgt.

Lösung: Wir erinnern uns die Formalisierung:

1. "Jeder Arzt wird von mindestens einem Patienten gemocht":
$$\psi_1 = \forall x.\, \mathsf{D}(x) \to \exists y.\, \mathsf{P}(y) \land \mathsf{L}(y,x);$$
2. "Kein Patient mag Quacksalber":
$$\psi_2 = \forall x.\, \mathsf{P}(x) \to \forall y.\, \mathsf{Q}(y) \to \neg \mathsf{L}(x,y);$$
3. "Kein Arzt ist Quacksalber":
$$\psi_3 = \forall x.\ \mathsf{D}(x) \to \neg \mathsf{Q}(x).$$

Um zu zeigen, dass die Formel ψ_3 aus den Formeln ψ_1 und ψ_2 folgt, zeigen wir, dass $(\psi_1 \land \psi_2) \to \psi_3$ eine allgemeingültige Formel ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Negation der Formel, d.h. $\neg((\psi_1 \land \psi_2) \to \psi_3) = \psi_1 \land \psi_2 \land \neg\psi_3$, unerfüllbar ist. Wir zeigen also mittels Resolution, dass diese Formel unerfüllbar ist. Hierzu ersetzen wir zunächst Implikationen durch Disjunktion und Negation und bringen die Formel in NNF:

$$\begin{aligned}
&\big(\forall x.\, \mathsf{D}(x) \to \exists y.\, \mathsf{P}(y) \land \mathsf{L}(y,x)\big)\\
&\qquad \land \big(\forall x.\, \mathsf{P}(x) \to \forall y.\, \mathsf{Q}(y) \to \neg \mathsf{L}(x,y)\big)\\
&\qquad \land \neg(\forall x.\, \mathsf{D}(x) \to \neg \mathsf{Q}(x))\\
\rightsquigarrow\ &\big(\forall x.\, \neg\mathsf{D}(x)\ \lor \exists y.\, \mathsf{P}(y) \land \mathsf{L}(y,x)\big)\\
&\qquad \land \big(\forall x.\, \neg\mathsf{P}(x) \lor \forall y.\, \neg\mathsf{Q}(y) \lor \neg \mathsf{L}(x,y)\big)\\
&\qquad \land \neg(\forall x.\, \neg\mathsf{D}(x) \lor \neg \mathsf{Q}(x))\\
\rightsquigarrow\ &\big(\forall x.\, \neg\mathsf{D}(x)\ \lor \exists y.\, \mathsf{P}(y) \land \mathsf{L}(y,x)\big)\\
&\qquad \land \big(\forall x.\, \neg\mathsf{P}(x) \lor \forall y.\, \neg\mathsf{Q}(y) \lor \neg \mathsf{L}(x,y)\big)\\
&\qquad \land \big(\exists x.\, \mathsf{D}(x) \land \mathsf{Q}(x)\big).
\end{aligned}$$

Um Konflikte zwischen Variablennamen beim Berechnen einer Pränexnormalform (d.h. beim "Nach-Vorne-Ziehen" der Quantoren) zu vermeiden, benennen wir die (mehrfach gebundenen) Variablen x und y jeweils passend um (beispielsweise werden alle Vorkommen der Variable y

in der ψ_1 entsprechenden Formel zu y_1 umbenannt). Als eine Pränexnormalform ergibt sich dann die folgende Formel:

$$\exists x_3 \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \forall y_2. (\neg \mathsf{D}(x_1) \vee \mathsf{P}(y_1) \wedge \mathsf{L}(y_1, x_1)) \wedge (\neg \mathsf{P}(x_2) \vee \neg \mathsf{Q}(y_2) \vee \neg \mathsf{L}(x_2, y_2)) \wedge \mathsf{D}(x_3) \wedge \mathsf{Q}(x_3).$$

Um es bei der nun folgenden Skolemisierung etwas leichter zu haben, haben wir beim Bilden der Pränexnormalform vorausschauend schon derart umgeformt, dass die Existenzquantoren möglichst weit vorne in der Formel stehen. Als Skolemform ergibt sich also

$$(\neg \mathsf{D}(x_1) \vee \mathsf{P}(f(x_1)) \wedge \mathsf{L}(f(x_1), x_1)) \wedge (\neg \mathsf{P}(x_2) \vee \neg \mathsf{Q}(y_2) \vee \neg \mathsf{L}(x_2, y_2)) \wedge \mathsf{D}(a) \wedge \mathsf{Q}(a).$$

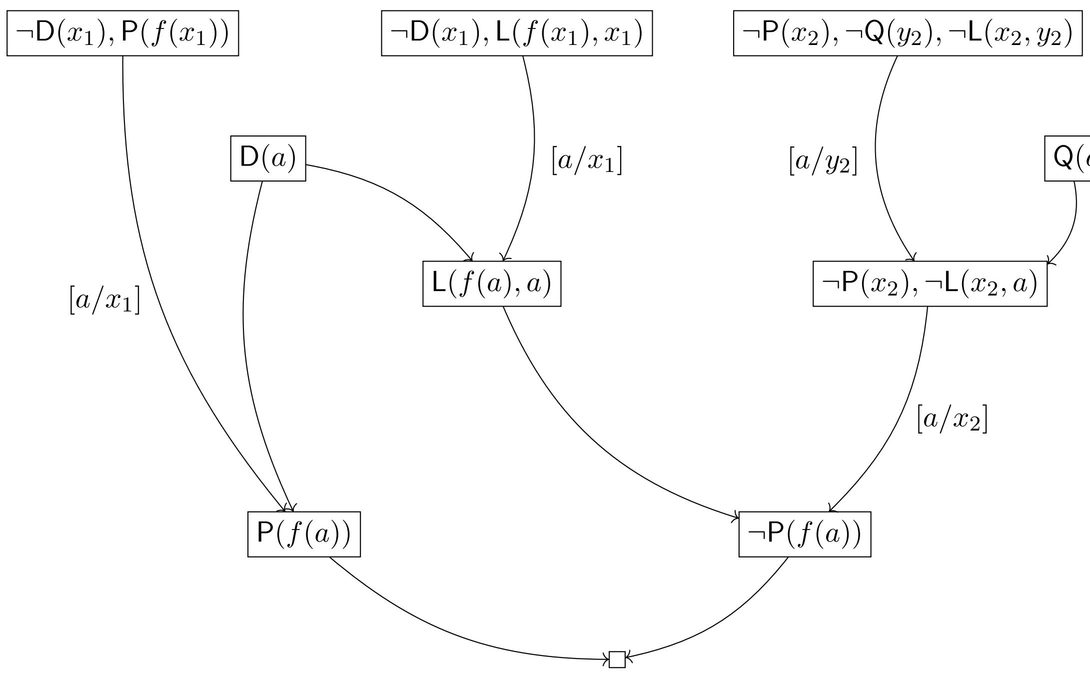
Diese Formel ist nun nicht mehr logisch äquivalent zur Pränexnormalform, sondern nur noch erfüllbarkeitsäquivalent, d.h. die Skolemform ist genau dann erfüllbar, wenn die Pränexnormalform erfüllbar ist. Da wir uns jedoch nur für die (Un)Erfüllbarkeit der negierten Eingangsformel interessieren, genügt uns hier Erfüllbarkeitsäquivalenz. Die CNF der obigen Formel ist wie folgt:

$$(\neg \mathsf{D}(x_1) \vee \mathsf{P}(f(x_1))) \wedge (\neg \mathsf{D}(x_1) \vee \mathsf{L}(f(x_1), x_1)) \wedge (\neg \mathsf{P}(x_2) \vee \neg \mathsf{Q}(y_2) \vee \neg \mathsf{L}(x_2, y_2)) \wedge \mathsf{D}(a) \wedge \mathsf{Q}(a).$$

Es ergeben sich danach die folgenden Klauseln:

$$\{\neg \mathsf{D}(x_1), \mathsf{P}(f(x_1))\}, \{\neg \mathsf{D}(x_1), \mathsf{L}(f(x_1), x_1)\}, \{\neg \mathsf{P}(x_2), \neg \mathsf{Q}(y_2), \neg \mathsf{L}(x_2, y_2)\}, \{\mathsf{D}(a)\}, \{\mathsf{Q}(a)\}.$$

Der folgende Resolutionsbeweis zeigt die Unerfüllbarkeit der negierten Eingangsformel:



Damit ist also $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \neg\psi_3$ als unerfüllbar und somit $(\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_3$ als allgemeingültig gezeigt.

Aufgabe 4 Wiederholte Substitution

Beweisen Sie die folgende Eigenschaft von Substitutionen: für jeden Term E und alle Substitutionen σ und τ gilt

$$E(\sigma\tau) = (E\sigma)\tau$$

(man erinnere sich, dass die Substitution $\sigma\tau$ durch $(\sigma\tau)(x) = \sigma(x)\tau$ definiert ist).

Hinweis: Verwenden Sie Induktion über E.

Lösung: Wir beweisen die Eigenschaft per Term-Induktion über E:

- Im Basisfall ist $E = x$, wobei x eine Variable ist. Dann haben wir

$$E(\sigma\tau) = (\sigma(x))\tau = (E\sigma)\tau.$$

- Im Induktionsschritt ist $E = f(E_1, \dots, E_n)$ und wir haben $E(\sigma\tau) = f(E_1, \dots, E_n)(\sigma\tau) = f(E_1(\sigma\tau), \dots, E_n(\sigma\tau)) \stackrel{IH}{=} f((E_1\sigma)\tau, \dots, (E_n\sigma)\tau) = f(E_1\sigma, \dots, E_n\sigma)\tau = (E\sigma)\tau$. Hier besteht die Induktionshypothese aus den n Teilannahmen $E_1(\sigma\tau) = (E_1\sigma)\tau$ bis $E_n(\sigma\tau) = (E_n\sigma)\tau$.