Übungsblatt 8 (Lösungen)

Aufgabe 2 DNF: Do it Yourself

Eine Grundeigenschaft der Aussagenlogik ist die *Dualität*: Konjunktion und Disjunktion sind zueinander *dual* in dem Sinne, dass

$$\phi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \qquad \text{und} \qquad \phi \vee \psi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi).$$

Definieren Sie eine zur CNF in diesem Sinne duale *disjunktive Normalform (DNF)*, bei der die Rollen von Konjunktion und Disjunktion vertauscht sind, und geben Sie ein Verfahren an, mit dem jede Formel in eine äquivalente DNF transformiert werden kann.

Nehmen Sie bei dieser Aufgabe an, dass Formeln aus Konjunktion, Disjunktion, Negation, $\top$, $\bot$ und Atomen aufgebaut sind.

Lösung: Eine *disjunktive Normalform* ist eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen. Sie hat also die folgende allgemeine Form (modulo Assoziativität, Kommutativität und Idempotenz von $\wedge$ und $\vee$):

$$\bigvee_{1 \leq i \leq n} (\bigwedge_{1 \leq j \leq k} L_{ij})$$

wobei wir wie üblich die leere Disjunktion durch $\bigvee_{\phi \in \emptyset} \phi = \bot$ und die leere Konjunktion durch $\bigwedge_{\phi \in \emptyset} \phi = \top$ definieren.

Die Menge aller disjunktiven Normalformen ist formal definiert durch die folgende Grammatik:

$$\begin{array}{rll} \textbf{Literale} & L ::= A \mid \neg A & (A \in \mathcal{A}) \\ \textbf{Klauseln} & C ::= \top \mid C' & C' ::= L \mid L \wedge C' \\ \textbf{DNFs} & \varphi ::= \bot \mid \psi & \psi ::= C \mid C \vee \psi \end{array}$$

Wir unterscheiden dadurch zwischen leeren ($\top$) und nichtleeren Klauseln (C') sowie zwischen trivialen DNFs ($\bot$) und allen anderen (ψ).

Sei φ eine Formel. Eine DNF φ' heißt *DNF von* φ, wenn $\varphi \equiv \varphi'$. Eine DNF von φ kann wie folgt definiert werden: Wir erhalten ϕ' aus ϕ indem wir jedes Vorkommen von $\bot$ in ϕ durch $A \wedge \neg A$ und jedes Vorkommen von $\top$ in ϕ durch $A \vee \neg A$ ersetzen (wobei $A \in \mathcal{A}$ beliebig gewählt werden kann); dann ist $\mathsf{DNF}(\mathsf{NNF}(\phi'))$ eine DNF von ϕ, wobei NNF wie in der Vorlesung definiert ist und DNF wie folgt rekursiv definiert ist:

$$\begin{aligned} \mathsf{DNF}(\phi) &= \phi && \text{(wenn } \phi \text{ keine Disjunktionen enthält)} \\ \mathsf{DNF}(\varphi \vee \psi) &= \mathsf{DNF}(\varphi) \vee \mathsf{DNF}(\psi) \\ \mathsf{DNF}(\varphi \wedge (\psi \vee \xi)) &= \mathsf{DNF}(\varphi \wedge \psi) \vee \mathsf{DNF}(\varphi \wedge \xi) \\ \mathsf{DNF}((\psi \vee \xi) \wedge \varphi) &= \mathsf{DNF}(\psi \wedge \varphi) \vee \mathsf{DNF}(\xi \wedge \varphi) \end{aligned}$$

Dabei verwenden wir notwendigerweise Assoziativität von $\wedge$, um z.B. $\mathsf{DNF}(((A \vee B) \wedge C) \wedge B)$ als $\mathsf{DNF}((A \vee B) \wedge (C \wedge B)) = \mathsf{DNF}(A \wedge (C \wedge B)) \vee \mathsf{DNF}(B \wedge (C \wedge B))$ zu berechnen.