Übungsblatt 2 (Lösungen)

Aufgabe 2 Abzählbare Mengen und Darüber Hinaus

Eine Menge A ist abzählbar, wenn eine injektive Abbildung von A in die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen existiert.

3. Beweisen Sie, dass nicht abzählbare Mengen existieren.

Lösung: Wir beweisen, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ unabzählbar ist, in dem wir annehmen, dass eine Injektion $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ existiert, und leiten einen Widerspruch davon ab. Sei

$$S = \left\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \bigcup f^{-1}[\{n\}]\right\} \subseteq \mathbb{N}$$

und sei $k = f(S)$. Dann $\{S\} = f^{-1}[\{f(S)\}] = f^{-1}[\{k\}]$ (denn f ist injektiv) und falls $k \in S$, dann $k \notin \bigcup f^{-1}[\{k\}] = S$, und falls $k \notin S = \bigcup f^{-1}[\{k\}]$, dann $k \in S$. Widerspruch.

Aufgabe 3 Abbildungen und Bijektionen (Präsenzaufgabe)

Für Mengen A und B bezeichnet B^A die Menge der Funktionen $f\colon A \to B$. Existiert eine Bijektion zwischen A und B, so schreiben wir auch $A \cong B$.

2. Beweisen Sie, dass für Mengen A, B, C gilt: $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$.

Lösung: Die gefragte Bijektion $F\colon (A \times B)^C \to A^C \times B^C$ schickt jedes $f\colon C \to A \times B$ nach $(f_1, f_2) \in A^C \times B^C$, wobei $f_1(x) = y$ und $f_2(x) = z$ wann immer $f(x) = (y, z)$.

Lassen uns zeigen, dass F injektiv ist. Nehmen wir an, dass $F(f) = F(g)$. Da $F(f) = (f_1, f_2)$ und $F(g) = (g_1, g_2)$ für passende f_1, f_2, g_1, g_2, jeweils $f_1 = g_1$ und $f_2 = g_2$. Nach Definition, für alle $x \in C$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x)) = (g_1(x), g_2(x)) = g(x)$, also $f = g$ als Abbildungen.

Lassen uns zeigen, dass F surjektiv ist. Seien $f\colon C \to A$ und $g\colon C \to B$ zwei Abbildungen, und finden so eine $h\colon C \to A \times B$, dass $F(h) = (f, g)$. Für jede $x \in C$, sei $h(x) = (f(x), g(x))$. Dass $F(h) = (f, g)$, follgt aus der Definition von f.