Mathematische Notation

Lutz Schröder

2. November 2022

1 Mengen

Grundlegende Relation zwischen Mengen ist das Elementverhältnis $\in$. Die Formel $x \in X$ liest sich „x ist Element der Menge y“. Mengen sind allein durch ihre Elemente bestimmt, d.h. zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben. Übliche Relationen und Operationen auf Mengen sind

- *Teilmengenbeziehung/Inklusion:* A ist *Teilmenge* von B, Schreibweise: $A \subseteq B$, wenn aus $x \in A$ stets $x \in B$ folgt, d.h. B mindestens alle Elemente von A enthält. A heißt *echte Teilmenge* von B, wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

- *Vereinigung:* $A \cup B$ ist die Menge mit $x \in A \cup B$ genau dann, wenn $x \in A$ oder $x \in B$.

- *Durchschnitt:* $A \cap B$ ist die Menge mit $x \in A \cap B$ genau dann, wenn $x \in A$ und $x \in B$.

- *Disjunktheit:* Mengen A und B sind *disjunkt*, wenn $A \cap B = \emptyset$.

- *Mengendifferenz:* $A \setminus B$ ist die Menge mit $x \in A \setminus B$ genau dann, wenn $x \in A$, aber nicht $x \in B$.

- *Mengenkomprehension:* Wenn A eine Menge ist und $P(x)$ eine Aussage über x, so ist $\{x \in A \mid P(x)\}$ eine Teilmenge von A, die Menge derjenigen Elemente x von A, die $P(x)$ erfüllen.

- *Große Vereinigung/Großer Durchschnitt:* Wenn $\mathfrak{A}$ eine Menge von Mengen ist, dann schreibt man

$$\begin{aligned} \bigcup \mathfrak{A} &= \{x \mid x \in A \text{ für ein } A \in \mathfrak{A}\} \\ \bigcap \mathfrak{A} &= \{x \mid x \in A \text{ für alle } A \in \mathfrak{A}\}. \end{aligned}$$

- *Kreuzprodukt/kartesisches Produkt:* Wenn A und B Mengen sind, dann schreibt man
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$
- *Potenzmenge:* Für eine Menge A ist die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(A)$ die Menge aller Teilmengen von A:
$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Ein häufig verwendetes Verfahren zum Beweis der Gleichheit zweier Mengen A, B ist, beide Inklusionen zwischen A und B zu zeigen, d.h. $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

2 Relationen und Funktionen

Eine (*zweistellige* oder *binäre*) *Relation* zwischen Mengen A und B ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$. Für $x \in A$, $y \in B$ schreibt man üblicherweise xRy als Abkürzung für $(x, y) \in R$. Allgemeiner betrachtet man oft auch Relationen anderer Stelligkeit; z.B. ist eine *einstellige* (*unäre*) Relation auf A einfach eine Teilmenge von A, und eine *dreistellige* (*ternäre*) Relation eine Teilmenge von $A \times A \times A$.

Eine Relation $f \subseteq A \times B$ heißt

- *linkstotal*, wenn für jedes $x \in A$ ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$, und
- *rechtseindeutig*, wenn für $x, y, y' \in A$ aus $(x, y), (x, y') \in f$ stets $y = y'$ folgt.

Eine linkstotale und rechtseindeutige Relation heißt *Abbildung* oder *Funktion* von A nach B, Notation: $f : A \to B$. Die beiden Eigenschaften rechtfertigen die Schreibweise $f(x)$ für das eindeutig bestimmte y mit $(x, y) \in f$. Für $C \subseteq A$ bezeichnet dann $f[C]$ das *Bild* von C unter f, d.h.
$$f[C] = \{y \in B \mid f(x) = y \text{ für ein } x \in C\},$$
und für $D \subseteq B$ bezeichnet $f^{-1}[D]$ das *Urbild* von D, d.h.
$$f^{-1}[D] = \{x \in A \mid f(x) \in D\}.$$
Allgemein hat man für Mengenkomprehensionen der Form $\{y \mid f(x) = y \text{ für ein } x \text{ mit } P(x)\}$ die Kurzform $\{f(x) \mid P(x)\}$, z.B. in dieser Schreibweise
$$f[C] = \{f(x) \mid x \in C\}.$$

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt *injektiv*, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ bereits $x_1 = x_2$ folgt. Ferner ist f *surjektiv*, wenn für jedes $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $f(x) = y$. Eine Abbildung ist *bijektiv*, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Z.B. ist die durch $f(n) = 2n$ definierte Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv, aber nicht surjektiv; die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - x^2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv; und die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = x+1$ ist bijektiv. Typische Beispiele injektiver Abbildungen sind ferner Abbildungen der Form $i\colon B \to A$ mit $i(x) = x$ für $B \subseteq A$; eine typische Klasse surjektiver Abbildungen sind *Quotientenabbildungen* $q\colon A \to A/{\sim}$, $q(x) = [x]_\sim$ für Äquivalenzrelationen $\sim \subseteq A \times A$.

Die *identische Abbildung* $id_A : A \to A$ ist definiert durch $id_A(x) = x$; diese Abbildung ist bijektiv. Gegeben Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist die *Komposition* $g \circ f : A \to C$ definiert durch $g \circ f(x) = g(f(x))$. Wenn $f : A \to B$ eine bijektive Abbildung ist, dann existiert eine *inverse Abbildung* $g : B \to A$ mit $g \circ f = id_A$, $f \circ g = id_B$.

3 Ordnungen und Äquivalenzen

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ ist

- *reflexiv*, wenn xRx für alle $x \in A$;
- *symmetrisch*, wenn für alle $x, y \in A$ aus xRy yRx folgt;
- *transitiv*, wenn für alle $x, y, z \in A$ aus xRy und yRz xRz folgt;
- *antisymmetrisch*, wenn für alle $x, y \in A$ aus xRy und yRx bereits $x = y$ folgt.

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt *Äquivalenzrelation* (auf A), wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, und *(partielle) Ordnung* (auf A), wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Beispiel: Auf den ganzen Zahlen ist die durch

$$nRm \text{ genau dann, wenn } n - m \text{ durch 3 teilbar ist,}$$

definierte Relation eine Äquivalenzrelation; auf den natürlichen Zahlen ist die Relation „teilt“ eine Ordnung (man überlege sich, warum das auf den ganzen Zahlen nicht stimmt). Eine Ordnung R auf A heißt *total* oder *linear*, wenn für alle $x, y \in A$ xRy oder yRx gilt. Nicht alle Ordnungen sind total, z.B. ist $\subseteq$ eine Ordnung auf $\mathcal{P}(A)$, und wenn z.B. $x, y \in A$, $x \neq y$, so gilt weder $\{x\} \subseteq \{y\}$ noch $\{y\} \subseteq \{x\}$. Auch die Teilbarkeitsordnung ist nicht total.

Wenn $\leq$ eine Ordnung auf A ist, so heißt ein Element $x \in A$ *größtes* Element von A, wenn $y \leq x$ für alle $y \in A$. Im Gegensatz hierzu heißt x *maximal*, wenn für alle $y \in A$ aus $x \leq y$ bereits $x = y$ folgt. Eine Menge kann viele maximale Elemente haben. Z.B. sind in der Menge aller echten Teilmengen von A, geordnet wieder durch $\subseteq$, alle Mengen der Form $A \setminus \{x\}$ für $x \in A$ maximal.

Wenn $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A ist, dann bezeichnet man mit $[x]_\sim$ oder, wenn $\sim$ aus dem Kontext klar ist, einfach $[x]$ für die *Äquivalenzklasse* von $x \in A$, gegeben durch

$$[x]_\sim = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

Die Äquivalenzklassen bilden eine *disjunkte Zerlegung* von A, d.h. jedes Element von A gehört zu genau einer Äquivalenzklasse. Insbesondere sind je zwei Äquivalenzklassen entweder gleich oder disjunkt. Mit

$$A/{\sim} = \{[x]_\sim \mid x \in A\}$$

bezeichnet man die *Quotientenmenge von A modulo* $\sim$.