Grundlagen der Logik in der Informatik WS 2021

Übungsblatt 12

Abgabe der Lösungen: 03.02, 12:00

Aufgabe 1 Natürliche vs. reelle Zahlen (Präsenzaufgabe)

Beweisen Sie, dass die *nicht-negativen reellen Zahlen* $\mathbb{R}^+$ unter den gleichen Interpretationen von 0, s, $+$ und $\times$ (d.h. $s(x) = x + 1$, $+$ wird als Addition, $\times$ als Multiplikation und 0 als 0 interpretiert) **kein** Modell der Peano-Arithmetik sind. Finden Sie dazu ein Peano-Axiom, das über $\mathbb{R}^+$ nicht gilt.

Aufgabe 2 Modellbau für Peano-Arithmetik (Präsenzaufgabe)

Da alle Axiome der Peano-Arithmetik über $\mathbb{N}$ gelten, ist die Peano-Arithmetik korrekt über natürlichen Zahlen; d.h. $\mathbb{N} \models \phi$ gilt für jedes Theorem ϕ der Peano-Arithmetik, d.h. für alle durch natürliches Schließen aus den Peano-Axiomen herleitbaren Formeln ϕ. Die Peano-Arithmetik ist dennoch *nicht* vollständig über $\mathbb{N}$; d.h. es gibt Formeln, die über $\mathbb{N}$ gültig, aber keine Theoreme der Peano-Arithmetik sind. Dies ist eine Konsequenz des berühmten ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes und hat unter anderem zur Folge, dass es strukturell andere Modelle als $\mathbb{N}$ gibt („strukturell anders“ in einem formal präzisen Sinn), die alle Peano-Axiome erfüllen. Solche Modelle werden auch *Nichtstandardmodelle* genannt. Man meint intuitiv, solche Modelle auf recht naive Weise konstruieren zu können, was aber fehlschlägt, wie die folgenden Versuche zeigen:

(a) Erweitern Sie das Modell $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, indem Sie die Semantik von Funktionssymbolen dahingehend vervollständigen, dass ∞ als Ergebnis ausgegeben wird, sobald mindestens ein Argument zu ∞ evaluiert wird.

(b) Beweisen Sie, dass das so definierte Modell kein Nichtstandardmodell der Peano-Arithmetik ist (es also ein Peano-Axiom ϕ gibt, so dass $\mathbb{N} \cup \{\infty\} \not\models \phi$). **Hinweis:** Betrachten Sie das Induktionsaxiom für $\phi(x) = \neg(x = s(x))$.

Aufgabe 3 Modellierung gerichteter Mengen (12 Punkte)

Wir führen hier Aufgabe 2 aus Übungsblatt 11 weiter. Dazu, errinern wir uns die relevante Formeln:

$$\forall x.\ \mathsf{R}(x, x) \tag{1}$$
$$\forall x, y, z.\ (\mathsf{R}(x, y) \wedge \mathsf{R}(y, z)) \rightarrow \mathsf{R}(x, z) \tag{2}$$
$$\forall x, y.\ \exists z.\ \mathsf{R}(z, x) \wedge \mathsf{R}(z, y)) \tag{3}$$
$$\forall x.\ \exists y.\ \neg\mathsf{R}(x, y) \tag{4}$$
$$\forall x.\ \exists y.\ \mathsf{R}(y, x) \wedge \neg\mathsf{R}(x, y) \tag{5}$$

(a) Berechnen Sie die Semantik der Formeln (1)–(4) im Standardmodell der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$; verwenden Sie dabei die folgende Interpretation von R: *6 Punkte*

$$\mathbb{N}[\![\mathsf{R}]\!] = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ ist größer oder gleich } y\}.$$

Berechnen Sie dabei die Semantik der Formeln jeweils Schritt für Schritt, entsprechend den Definitionen aus der Vorlesung. Erläutern Sie die intuitive Bedeutung der Implication $(1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4) \rightarrow (5)$ (bewiesene in Aufgabe 2 aus Übungsblatt 11).

(b) Bilden Sie ein Modell, das R interpretiert und das die Axiome (1)–(4) erfüllt, aber im Gegensatz zu Teilaufgabe (a) mindestens zwei *unvergleichbare* Elemente a und b enthält; dabei sind a und b unvergleichbar g.d.w. weder $\mathsf{R}(a, b)$ noch $\mathsf{R}(b, a)$ gilt. *6 Punkte*

Aufgabe 4 Peano-Arithmetik im Quadrat (10 Punkte)

Betrachten Sie die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ von Paaren von natürlichen Zahlen (x, y) mit $x, y \in \mathbb{N}$ und die folgende elementweise definierte Semantik von 0, s, $+$ und $\times$ über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{N} \times \mathbb{N})[\![0]\!] &= (\mathbb{N}[\![0]\!], \mathbb{N}[\![0]\!]),\\
(\mathbb{N} \times \mathbb{N})[\![s]\!](x, y) &= (\mathbb{N}[\![s]\!](x), \mathbb{N}[\![s]\!](y)),\\
(\mathbb{N} \times \mathbb{N})[\![+]\!]((x, y), (x', y')) &= (\mathbb{N}[\![+]\!](x, x'), \mathbb{N}[\![+]\!](y, y')),\\
(\mathbb{N} \times \mathbb{N})[\![\times]\!]((x, y), (x', y')) &= (\mathbb{N}[\![\times]\!](x, x'), \mathbb{N}[\![\times]\!](y, y')).
\end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kein Nichtstandardmodell der Peano-Arithmetik ist, indem Sie zeigen, dass

(a) $\forall x, y.\ x + y = s(0) \rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ aus PA_1–PA_7 folgt. Führen Sie Ihren Beweis nach Ihrer Wahl in Fitch oder in Coq. *5 Punkte*

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass die Aussage

$$\forall x, y.\ x + y = 0 \rightarrow (x = 0 \wedge y = 0)$$

aus PA_1–PA_7 folgt.

(b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \not\models \forall x, y.\ x + y = s(0) \rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$. *5 Punkte*

Aufgabe 5 Bonusaufgabe: Unendliche Modelle (+5 Punkte)

Wir betrachten erneut die Axiome (1)-(4) aus Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass diese Axiome zusammen in keinem endlichen Modell erfüllt sein können.