Grundlagen der Logik in der Informatik WS 2021

Übungsblatt 11

Abgabe der Lösungen: Do. 27.01, 12:00

Aufgabe 1 Fitch Trifft Induktion (Präsenzaufgabe)

Die Axiome der Peano-Arithmetik (mit $+$ und $\times$) lauten

PA$_1$. $\forall x.\, \neg(0 = s(x));$

PA$_2$. $\forall x.\, \forall y.\, s(x) = s(y) \to (x = y);$

PA$_3$. $\forall x.\, x + 0 = x;$

PA$_4$. $\forall x.\, \forall y.\, x + s(y) = s(x + y);$

PA$_5$. $\forall x.\, x \times 0 = 0;$

PA$_6$. $\forall x.\, \forall y.\, x \times s(y) = x \times y + x;$

PA$_7$. $$\forall y_1, \ldots, y_n.\, \big(\phi(0, y_1, \ldots, y_n) \wedge \forall x.\, (\phi(x, y_1, \ldots, y_n) \to \phi(s(x), y_1, \ldots, y_n))\ . \\ \to \forall x.\, \phi(x, y_1, \ldots, y_n)\big)$$

Das letzte Axiom ist in Wirklichkeit ein *Axiomenschema*, das für jedes ϕ ein Axiom erzeugt, eine sogenannte *Instanz*. Diese Instanzen heißen erwartungsgemäß *Induktionsaxiome*. Die schematische Formulierung ist eine Annäherung an das eigentlich beabsichtigte Induktionsprinzip, das über eine Prädikaten*variable* P anstelle von ϕ redet, aber in Prädikatenlogik erster Stufe nicht ausdrückbar ist.

(a) Beweisen Sie die folgende Modifikation von PA$_3$ in Fitch:

PA$'_3$. $\forall x.\, 0 + x = x.$

(b) Formalisieren Sie Ihren Fitch-Beweis in Coq. Sie können die folgende Codevorlage verwenden.

```
Require Import Classical.

Parameter Nat: Set.                 (* Typ der natürlichen Zahlen *)

Parameters zero: Nat.
Parameters s: Nat -> Nat.

Parameters plus times: Nat -> Nat -> Nat.

Notation "A + B" := (plus A B).     (* Infixnotation für plus *)
Notation "A * B" := (times A B).    (* Infixnotation für times *)

Notation "0" := (zero).

Axiom PA1: forall x: Nat, ~(0 = s(x)).
Axiom PA2: forall x y: Nat, (s(x) = s(y)) -> (x=y).
Axiom PA3: forall x: Nat, x + 0 = x.
```

```
Axiom PA4: forall x y: Nat, x + s(y) = s(x+y).
Axiom PA5: forall x: Nat, x * 0 = 0.
Axiom PA6: forall x y: Nat, x * s(y) = x * y + x.
Axiom PA7: forall P: Nat -> Nat -> Prop, forall y: Nat,
  (P 0 y /\ forall x: Nat, (P x y -> P (s x) y)) -> forall x : Nat, P x y.

Lemma PA3': forall x: Nat, 0 + x = x.

  (* Ihren Beweis hier einfügen *)

Qed.
```

Achtung! Natürliche Zahlen sind in Coq bereits implementiert. Gegenstand der Aufgabe ist aber gerade eine (teilweise) Neuimplementierung. Beachten Sie, dass die Induktionsaxiome in der Codevorlage in zwei Hinsichten von der Formulierung von PA_7 abweichen:

- Statt mehrerer Variablen $y_1, \ldots, y_n$ wird nur eine einzelne Variable y verwendet, was für Zwecke der Aufgabe ausreicht.
- Statt eines Axiomenschemas wird echte Quantifizierung über Prädikate verwendet, was uns strenggenommen von der *Logik erster Stufe* zur *Logik zweiter Stufe* führt (wie es auch der ursprünglichen Absicht von Peano entspricht). Dies ist ein auf diese Aufgabe beschränkter Sonderfall. Die notwendigen Instanzen von `PA7` können Sie sich im Laufe Ihrer Beweise wie folgt verschaffen:

```
specialize (PA7 (fun x y : Nat => <Induktionsbehauptung>)); intro.
```

  Als ein einfaches, wenn auch nicht sinnvolles Beispiel wird durch

```
specialize (PA7 (fun x y : Nat => x = y)); intro.
```

  die folgende Instanz von `PA7` als Prämisse hinzugefügt:

```
forall y : Nat, 0 = y /\ (forall x : Nat, (x = y -> s x = y) -> forall x0 : Nat, x0 = y)
```

Aufgabe 2 Modellierung gerichteter Mengen (8 Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe *gerichtete Mengen*, d.h. Modelle, die die folgenden Axiome erfüllen:

$$\textit{Reflexivität:} \quad \forall x.\ \mathsf{R}(x,x) \tag{1}$$

$$\textit{Transitivität:} \quad \forall x,y,z.\ (\mathsf{R}(x,y) \wedge \mathsf{R}(y,z)) \to \mathsf{R}(x,z) \tag{2}$$

$$\textit{Existenz einer oberen Schranke:} \quad \forall x,y.\ \exists z.\ \mathsf{R}(z,x) \wedge \mathsf{R}(z,y) \tag{3}$$

Im Sinne von Aufgabe 5, Übungsblatt 10, sind gerichtete Mengen also Präordnungen, die zusätzlich (3) erfüllen.

Zeigen Sie mittels Resolution, dass die obigen Axiome zusammen mit der Formel

$$\forall x.\ \exists y\ \neg\mathsf{R}(x,y) \tag{4}$$

die folgende Eigenschaft implizieren:

$$\forall x.\ \exists y.\ \mathsf{R}(y,x) \wedge \neg\mathsf{R}(x,y) \tag{5}$$

Aufgabe 3 Kommutativität von + (12 Punkte)

Leiten Sie die Kommutativität von + aus den Peano-Axiomen her. Dazu

4 Punkte (a) Verwenden Sie als Lemma die in Aufgabe 2 bewiesene Formel PA_3' und beweisen Sie ferner in Fitch die folgende Modifikation von PA_4:

$$\mathrm{PA}_4'.\ \forall x. \forall y.\, s(y) + x = s(y + x).$$

4 Punkte (b) Formalisieren Sie Ihren Beweis von PA_4' in Coq.

4 Punkte (c) Beweisen Sie anschließend weiter in Coq, dass + kommutativ ist.

Vorlage:

```
Lemma PA4': forall x y: Nat, s(x) + y = s(x+y).

  (* Ihren Beweis hier einfügen *)

Qed.

Theorem plus_commute : forall x y: Nat, x + y = y + x.

  (* Ihren Beweis hier einfügen *)

Qed.
```