

Übungsblatt 8

Abgabe der Lösungen: Do. 23.12, 12:00

Aufgabe 1 Peano-Arithmetik

(Präsenzaufgabe)

Peano-Arithmetik ist eine Formalisierung der natürlichen Zahlen in Logik erster Stufe (aus dem Jahr 1889!). Die über den Operationen $+$, \times , s und der Konstante 0 formulierten Axiome lauten wie folgt:

$$PA_1: \forall x. \neg(0 = s(x))$$

$$PA_2: \forall x, y. s(x) = s(y) \rightarrow x = y$$

$$PA_3: \forall x. x + 0 = x$$

$$PA_4: \forall x, y. x + s(y) = s(x + y)$$

$$PA_5: \forall x. x \times 0 = 0$$

$$PA_6: \forall x, y. x \times s(y) = x \times y + x$$

$$PA_7: \forall y_1, \dots, y_n. \phi(0, y_1, \dots, y_n) \wedge (\forall x. \phi(x, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \phi(s(x), y_1, \dots, y_n)) \rightarrow \forall x. \phi(x, y_1, \dots, y_n)$$



Giuseppe Peano



Pierre de Fermat

Das letzte Axiom ist in Wirklichkeit ein *Axiomenschema*, das für jedes ϕ ein Axiom erzeugt, eine sogenannte *Instanz*. Diese Instanzen heißen erwartungsgemäß *Induktionsaxiome*. Die schematische Formulierung ist eine Annäherung an das eigentlich beabsichtigte Induktionsprinzip, das über eine Prädikatenvariable P anstelle von ϕ redet, aber in Prädikatenlogik erster Stufe nicht ausdrückbar ist.

(a) Führen Sie zusätzlich zur obigen Signatur binäre Prädikatenvariable für folgende Eigenschaften ein, und definieren Sie diese durch Formeln (mit zwei freien Variablen) in der ursprünglichen Sprache: Eine Zahl ist kleiner als eine weitere Zahl, eine Zahl ist Quadratwurzel einer weiteren Zahl, eine Zahl teilt eine weitere Zahl.

(b) Formalisieren Sie die folgende Aussage in der erweiterten Signatur: Es gibt unendlich viele Quadratzahlen.

(c) Der große Fermatsche Satz lautet: “*Es ist nicht möglich, einen Kubus in zwei Kuben, oder ein Biquadrat* in zwei Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu zerlegen*”. Formalisieren Sie die Instanz dieser Aussage für die **fünfte Potenz** in Peano-Arithmetik. **Hinweis:** Formalisieren Sie als erstes die einzelnen Bestandteile der Aussage. Definieren Sie notfalls neue Prädikate wie in Klausel (a).

Aufgabe 2 Freie Variablen (Präsenzaufgabe)

Berechnen Sie für die folgende Formel die Mengen der freien Variablen nach der rekursiven Definition aus der Vorlesung:

$$(\forall x. P(x) \wedge \exists x. P(y)) \wedge \exists y. Q(x).$$

Aufgabe 3 Variablensubstitution (Präsenzaufgabe)

Man erinnere sich aus der Vorlesung, dass eine *Substitution* eine Funktion ist, die Variablen auf Terme abbildet und dabei alle bis auf endlich viele Variablen auf sich selbst abbildet. Mit $[E_1/x_1, \dots, E_n/x_n]$ bezeichnen wir für paarweise verschiedene Variablen x_i die Substitution, die jeweils x_i auf E_i abbildet und alle anderen Variablen auf sich selbst.

Für Formeln ϕ und Ausdrücke E wird das Ergebnis $\phi\sigma$ bzw. $E\sigma$ der Anwendung einer Substitution σ auf ϕ bzw. E gemäß Vorlesung wie folgt rekursiv berechnet:

- $x\sigma = \sigma(x)$;
- $f(E_1, \dots, E_n)\sigma = f(E_1\sigma, \dots, E_n\sigma)$, wobei f ein Funktions- oder Prädikatensymbol ist;
- $(E = D)\sigma = (E\sigma = D\sigma)$;
- $(\neg\phi)\sigma = \neg(\phi\sigma)$;
- $(\phi \wedge \psi)\sigma = (\phi\sigma \wedge \psi\sigma)$;
- $(\forall x. \phi)\sigma = \forall y. \phi\sigma'$, wobei $\sigma'(x) = y$, $\sigma'(z) = \sigma(z)$ für jedes $z \neq x$, und wobei ferner y so gewählt ist, dass $y \notin FV(\sigma(z))$ für alle $z \in FV(\forall x. \phi)$.

(Damit ist Substitution natürlich nur bis auf Umbenennung gebundener Variablen eindeutig definiert.)

Berechnen Sie die folgende Substitution:

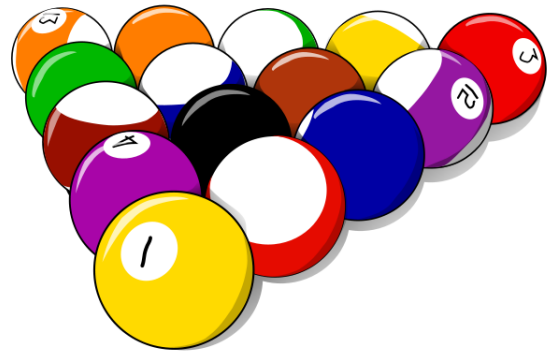
$$((\forall x. R(x, y)) \wedge Q(y))[c/x, f(x, y)/y, c/z].$$

Achtung: Dabei ist c eine Konstante, und x, y und z sind Variablennamen.

Aufgabe 4 Dreieckszahlen in Peano-Arithmetik (6 Punkte)

* Biquadrat = vierte Potenz

Eine *Dreieckszahl* ist eine Zahl, die der Summe aller Zahlen von 1 bis zu einer Obergrenze n entspricht. Beispielsweise ist die 15 eine Dreieckszahl, da $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ ist. Eine *Quadratzahl* ist im gleichen Sinn (warum?) eine Zahl, die durch die Summe der ungeraden Zahlen entsteht, wie z.B. $16 = 1 + 3 + 5 + 7$. Nehmen Sie ohne Beweis an, dass Dreiecks- bzw. Quadratzahlen der Form $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ bzw. n^2 sind und formalisieren Sie in der Signatur aus Aufgabe 1 die folgenden Aussagen:



- 1 Punkt (a) n ist eine Dreieckszahl.
- 2 Punkte (b) gerade Quadratzahlen sind durch 4 teilbar.
- 3 Punkte (c) Es gibt unendlich viele Zahlen, die gleichzeitig eine Dreieckszahl und eine Quadratzahl sind.

Achtung: Es darf ausdrücklich nur die ursprüngliche Signatur $\Sigma_{\text{Peano}} = \{+/2, \times/2, s/1, 0/0\}$ verwendet werden. Zusätzliche Symbole dürfen nur in Form von Abkürzungen verwendet werden, d.h. müssen wie in Aufgabe 1(a) durch Σ_{Peano} -Formeln definiert werden.

Aufgabe 5 Freie Variablen

(4 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Formeln die Mengen der freien Variablen nach der rekursiven Definition aus der Vorlesung:

- 2 Punkte (a) $\forall x. S(x, y) \rightarrow \exists y. x = y \wedge S(x, y) \rightarrow P(y)$;
- 2 Punkte (b) $(\forall x. P(x) \rightarrow R()) \vee ((\exists x. P(x)) \rightarrow (Q(y) \rightarrow \forall y. S(x, z)))$.

Aufgabe 6 Variablensubstitution

(10 Punkte)

- 3 Punkte (a) Vervollständigen Sie die Definition aus Aufgabe 3, indem Sie entsprechende Gleichungen für $(\phi \vee \psi)\sigma$ und $(\exists x. \phi)\sigma$ angeben, die sich aus der Kodierung von $\phi \vee \psi$ als $\neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ und von $\exists x. \phi$ als $\neg(\forall x. \neg\phi)$ ergeben.

Achtung: Gefragt sind sowohl die entsprechenden Gleichungen als auch Begründungen, warum sie tatsächlich folgen.

- 3 Punkte (b) Berechnen Sie die folgende Substitution **ohne** neue (d.h. nicht bereits in der jeweiligen Formel vorkommende) Variablennamen einzuführen:

$$(\exists z. S(y, z) \wedge \forall y. S(x, y))[f(y, z)/x, g(z)/y, c/z]$$

Achtung: Dabei ist c eine Konstante, und x, y und z sind Variablennamen.

- (c) Eine *Variablenpermutation* ist eine Substitution der Form $[x_{n_1}/x_1, \dots, x_{n_k}/x_k]$ (mit $n_i \in \{1, \dots, k\}$, $i = 1, \dots, k$), die *injektiv* ist, d.h. $x_{n_i} \neq x_{n_j}$ für $i \neq j$ (Achtung: $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ setzen wir bei der [...] Schreibweise generell voraus). 4 Punkte

Zeigen Sie, dass man, wenn σ eine Variablenpermutation ist, in der Definition von $(\forall x. \phi)\sigma$ wie in Aufgabe 3 die Substitution σ' einfach als $\sigma' = \sigma$ wählen kann. Wie wählt man y in $\forall y. \phi\sigma'$? Begründen Sie Ihre Antwort.