

# Übungsblatt 7

Abgabe der Lösungen: Do. 16.12, 12:00

---

## Aufgabe 1 Verbesserte Resolution I (Präsenzaufgabe)

Sei  $A$  ein Atom und  $\varphi$  eine Menge von Klauseln. Seien  $\varphi/A$  und  $\varphi/\neg A$  die in der Vorlesung definierten Klauselmengen

$$\begin{aligned}\varphi/A &= \{C \setminus \{\neg A\} \mid A \notin C, C \in \varphi\} \\ \varphi/\neg A &= \{C \setminus \{A\} \mid \neg A \notin C, C \in \varphi\}.\end{aligned}$$

1. *Pure Literal Elimination (PLE)*: Zeigen Sie, dass das Resolutionsverfahren angewendet auf  $\varphi$  dieselbe Antwort liefert wie für  $\varphi/A$  ( $\varphi/\neg A$ ), wenn  $\neg A \notin C$  ( $A \notin C$ ) für alle  $C \in \varphi$ .
2. *Unit Propagation (UP)*: Zeigen Sie, dass das Resolutionsverfahren angewendet auf  $\varphi$  dieselbe Antwort liefert wie für  $\varphi/A$  ( $\varphi/\neg A$ ), wenn  $\{A\} \in \varphi$  ( $\{\neg A\} \in \varphi$ ).

Zeigen Sie die Unerfüllbarkeit der Klauselmenge

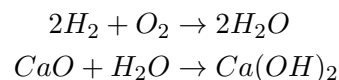
$$\{D, B, \neg C\}, \{D, C\}, \{\neg D, B\}, \{\neg C, B, \neg A\}, \{C, B, \neg A\}, \{\neg B, \neg A\}, \{\neg B, A\},$$

unter Verwendung der obigen Prinzipien.

## Aufgabe 2 Reaktion durch Resolution (Präsenzaufgabe)



Wir nehmen an, dass die folgenden chemischen Reaktionen möglich sind



und ein ausreichender Vorrat von  $H_2$  (*Wasserstoff*) und  $CaO$  (*ungelöschter Kalk*) zu Verfügung steht. Formalisieren und beweisen Sie mittels Resolution folgende Aussagen:

- (a) Wenn zusätzlich  $O_2$  (*Sauerstoff*) zur Verfügung steht, kann man  $Ca(OH)_2$  (*gelöschter Kalk*) synthetisieren.
- (b) Andernfalls kann man  $Ca(OH)_2$  *nicht* synthetisieren.

**Hinweis:** Betrachten Sie chemische Verbindungen wie  $CaO$  und  $O_2$  usw. als aussagenlogische

Atome, + als Konjunktion und den *Reaktionspfeil*  $\rightarrow$  als Implikation. Sie dürfen die Ergebnisse von Aufgabe 1 verwenden.

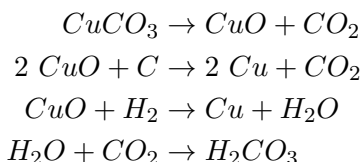
### Aufgabe 3 Verbesserte Resolution bei der Arbeit (4 Punkte)

Überprüfen Sie, ob die folgenden als Klauselmengen geschriebenen CNFs konsistent sind. Verwenden Sie dabei die Ergebnisse von Aufgabe 1.

- (a)  $\{P, Q, R\}, \{P, Q, \neg R\}, \{P, \neg Q, R\}, \{\neg P, Q, R\}, \{W, \neg Q\}, \{\neg W, R\}$ . 2 Punkte
- (b)  $\{P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P, Q, \neg R\}, \{P, \neg Q, \neg R\}, \{\neg P, Q, R\}, \{\neg R, \neg Q, \neg P\}, \{Q, \neg R\}$ . 2 Punkte

### Aufgabe 4 Reaktion durch Resolution (6 Punkte)

Analog zu Aufgabe 2, nehmen wir an, dass die folgenden chemischen Reaktionen möglich sind



und ein Vorrat von  $\text{CuCO}_3$  und  $\text{C}$  zu Verfügung steht. Formalisieren Sie und beweisen Sie mittels Resolution folgende Aussagen:

- (a) Wenn zusätzlich  $\text{H}_2$  zur Verfügung steht, kann man  $\text{H}_2\text{CO}_3$  synthetisieren. 3 Punkte
- (b) Andernfalls kann man  $\text{H}_2\text{CO}_3$  *nicht* synthetisieren. Beweisen Sie das höchstens in **fünf** Schritten. Ein Schritt ist dabei (eine einmalige Anwendung (!) von) entweder Unit Propagation (UP), oder Pure Literal Elimination (PLE) oder Resolution. Die Klauselmenge nach dem letzten Schritt muss die Eigenschaft haben, dass keine weitere Anwendungen von Resolution neue Klauseln erzeugen. 3 Punkte

**Hinweis:** Versuchen sie vorerst mit PLE soviel wie möglich die Klauselmenge zu verkürzen.

### Aufgabe 5 Verbesserte Resolution II (10 Punkte)

Beweisen Sie, dass das Resolutionsverfahren, wie es in der Vorlesung eingeführt wurde, zur effizienteren Implementierung dahingehend geändert werden kann, dass am Anfang jede Klausel der gegebenen CNF, die eine andere Klausel der CNF als Teilmenge enthält, entfernt wird. So kann man beispielsweise  $\{\neg A, B, \neg C\}, \{B, \neg C\}, \{A, C\}$  zu  $\{\{B, \neg C\}, \{A, C\}\}$  komprimieren. 7 Punkte

Genauer gesagt ist zu beweisen, dass das neue Verfahren immer die gleiche Antwort liefert wie das ursprüngliche. **Achtung:** Die Semantik von Formeln und die Vollständigkeit des Resolutionsverfahrens sollen nicht verwendet werden.

**Hinweis:** Verwenden Sie vollständige Induktion über die zur Herleitung einer bestimmten Klausel benötigten Anzahl Schritte im Resolutionsverfahren. Beweisen Sie damit, dass es für jede Klausel  $C$ , die mittels Resolution in  $n$  Schritten aus der ursprünglichen Klauselmenge abgeleitet werden kann, ein entsprechendes  $C'$  gibt, so dass  $C' \subseteq C$  und  $C'$  aus der komprimierten Klauselmenge mittels Resolution ableitbar ist. Zeigen Sie, dass mit dieser Aussage folgt, dass

der modifizierte Algorithmus „nicht erfüllbar“ antwortet, wenn der ursprüngliche Algorithmus dies tut. Die umgekehrte Implikation ist trivial — warum?

3 Punkte

Verwenden Sie die Verbesserte Resolution I und II zu überprüfen, ob die folgende Klauselmenge konsistent ist:

$$\{\neg P, Q, R, W, S\}, \{\neg P, Q, S\}, \{\neg P, Q, \neg R, S\}, \{\neg P, Q, R, W\}, \{\neg Q, R, W, \neg S\}, \{\neg P, Q, \neg W\}.$$